

Phys. sn.

43

Phys. sp.

181

Phys. sp.
40
187.

Neumann

F. E.

Die mathematischen Gesetze

der

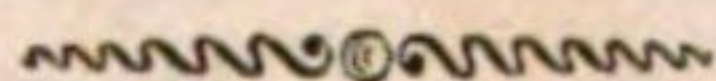
inducirten elektrischen Ströme

von

F. E. NEUMANN

Ritter des rothen Adlerordens vierter Classe, ordentlichem Professor der Mineralogie und Physik
an der Königsberger Universität, Correspondenten der Berliner und Petersburger
Akademie der Wissenschaften.

Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 27. October 1845.



Berlin

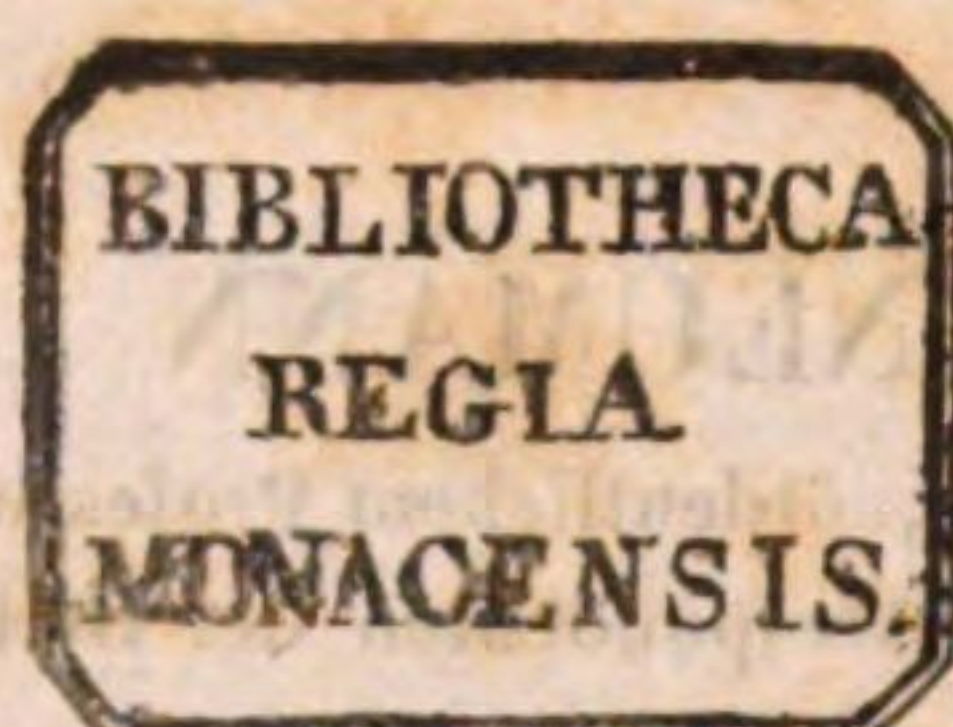
Verlag von G. Reimer
1846.

Akademische Buchdruckerei.

155. 83.

Die mathematischen Gesetze

inducirten elektrischen Ströme



Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 27. October 1845.

Berlin
Verlag von G. Reimer
1846

Versuch einer mathematischen Theorie der inducirten elektrischen Ströme.

Wenn die magnetische oder elektrodynamische Resultante, auf ein Element eines Leiters bezogen, eine Veränderung ihres Werthes erleidet, so wird in diesem Element eine elektromotorische Kraft erregt, die, wenn ihr ein in sich geschlossener leitender Weg dargeboten wird, einen elektrischen Strom hervorbringt, welcher der Inductionsstrom genannt wird. Die folgenden Untersuchungen über diesen Strom setzen voraus, daß die inducirende Ursache, d. i. die Veränderung der magnetischen oder elektrodynamischen Resultante, mit einer Geschwindigkeit eintrete, welche als klein in Beziehung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität angesehen werden kann. Ohne diese Voraussetzung kann man nicht die inducirten elektrischen Ströme als im stationären Zustand befindlich ansehen und die Ohm'schen Gesetze darauf anwenden. Ausgeschlossen von den hier folgenden Betrachtungen sind also z. B. die durch elektrische Entladungen inducirten Ströme.

Das inducirte Element gehört entweder einem Drathe oder einem dünnen Bleche oder einem Leiter an, in dessen Form kein solcher Unterschied der Dimensionen stattfindet. Den ersten Fall nenne ich die lineare Induction; diese ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Die Untersuchung der linearen Induktion ist die einfachste, weil hier die in dem Element inducirte Elektricität sich auf einem gegebenen Wege fortpflanzt, während in den beiden andern Fällen, wo das Element einer Fläche oder einem Körper angehört, die Wege, auf welchen die Fortpflanzung der erregten Elektricität geschieht, erst bestimmt werden müssen. Die Princi-

prien der linearen Induktion gestatten aber eine Ausdehnung auf diese complicirteren Fälle, welche der Gegenstand einer zweiten Abhandlung sein soll, in der die Theorie des Rotations-Magnetismus entwickelt werden wird. Die vorliegende Abhandlung hat auch diejenigen Inductionen, welche durch Formveränderungen des inducirenden Stroms oder inducirten Leiters erregt werden, so wie die Rückwirkungen der inducirten Ströme auf die Inducenten nicht in den Kreis ihrer Untersuchungen gezogen, aber sie enthält die Principien dafür. Folgende Resultate bilden ihren hauptsächlichen Inhalt.

§. 1. Aus dem Lenz'schen Satze: daß die Wirkung, welche der inducirende Strom oder Magnet auf den inducirten Leiter ausübt, wenn die Induktion durch eine Bewegung des letzteren hervorgebracht ist, immer einen hemmenden Einfluß auf diese Bewegung ausübt, — in Verbindung mit dem Satze: daß die Stärke der momentanen Induktion proportional der Geschwindigkeit dieser Bewegung ist, wird das allgemeine Gesetz der linearen Induktion abgeleitet:

$$E.Ds = -\epsilon v C.Ds.$$

In dieser Formel ist Ds ein Element des inducirten Drathes und $E.Ds$ die in dem Element Ds inducirte elektromotorische Kraft; v ist die Geschwindigkeit, mit welcher Ds bewegt wird, C die nach der Richtung, in welcher Ds bewegt wird, zerlegte Wirkung des Inducenten auf Ds , dieses Element von der Einheit des Stroms durchströmt gedacht. Die Gröfse ϵ ist unabhängig von der Beschaffenheit des inducirten Leiters und kann bei der linearen Induktion als eine Konstante angesehen werden, ist aber eine solche Funktion der Zeit, die sehr rasch abnimmt, wenn ihr Argument einen merklichen Werth erhält, und muß auch als solche bei der Flächen-Induktion und der Induktion in Körpern behandelt werden.

§. 2. Wenn in dem Element Ds eines leitenden Bogens s die elektromotorische Kraft $E.Ds$ erregt wird, und E nicht allein eine Funktion des Ortes von Ds in s ist, sondern auch eine Funktion der Zeit, so gilt doch unter der Voraussetzung daß die Veränderungen, welche E mit der Zeit erfährt, nicht mit einer so großen Geschwindigkeit eintreten, die einen merklichen Werth in Beziehung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Electricität hat, der Ohm'sche Satz: daß der erregte Strom gleich ist der Summe der elektromotorischen Kräfte des ganzen Bogens s , dividirt durch den Widerstand des Weges.

§. 3. Die Stärke des in einem linearen Leiter s , welcher sich unter dem Einfluß eines elektrischen Stroms oder eines Magneten bewegt, inducirten Stromes ist

$$- \epsilon \epsilon' S . v C D s,$$

wo ϵ' den reciproken Werth des Widerstandes des Weges bedeutet, welchen der Strom zu durchlaufen hat, und S eine Integration bezeichnet, welche sich über alle bewegten Theile des Leiters erstreckt. Der vorstehende Ausdruck mit dem Element der Zeit dt multiplicirt giebt den inducirten Differentialstrom, dessen Maafs die Wirkung ist, welche der inducirte Strom während des Elements der Zeit, z. B. auf eine Magnetnadel, ausübt; die Summe der Wirkungen, welche er in einer endlichen Zeit ausübt, ist das Maafs des inducirten Integralstroms. Der Werth des Integralstroms hängt allein von der Länge und Lage des Weges ab, welchen der Leiter durchlaufen hat, und ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher er durchlaufen wurde.

Die elektromotorische Kraft des Differentialstroms ist das negative virtuelle Moment der Kraft, welche der Inducent auf den Leiter ausübt, wenn dieser von dem konstanten Strom ϵ durchströmt gedacht wird.

Die elektromotorische Kraft des Integralstroms, welcher auf dem Wege von ω_0 bis ω_1 erregt wird, ist der Verlust an lebendiger Kraft, welchen der Inducent in dem Leiter hervorbringen würde, wenn dieser sich von ω_0 bis ω_1 frei bewegte und von dem Strome ϵ durchströmt gedacht wird.

Der wirkliche Verlust an lebendiger Kraft, welchen ein linearer Leiter, der dem Induktionsstrom einen geschlossenen Weg darbietet, in dem Zeitraum von t_0 bis t_1 erleidet, wenn er sich frei, z. B. in Folge seiner Trägheit, unter dem Einfluß eines Inducenten bewegt, ist

$$2 \epsilon \epsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt (S . v C D s)^2.$$

Wenn die Componenten der Wirkung des Inducenten auf ein Element des bewegten Leiters, welches von dem Strome ϵ durchströmt gedacht wird, partielle Differentialquotienten derselben Funktion sind, und man die Gleichgewichts-Oberflächen construirt, für deren jede diese Funktion einen konstanten Werth hat, welcher der Druck an dieser Oberfläche heisst: so ist die elektromotorische Kraft des Integralstroms, welcher in dem Leiter, wenn er sich parallel mit sich selbst von ω_0 bis ω_1 bewegt hat, inducirt ist, gleich

der Differenz des Drucks an den beiden durch ω_0 und ω_1 gehenden Gleichgewichts-Oberflächen. — Der Integralstrom ist also unter den angegebenen Bedingungen unabhängig von der Länge und Lage des Weges, auf welchem er inducirt wird, und hängt allein von dem Orte der Endpunkte desselben ab. — Dieser Satz wird in der Folge noch erweitert.

§. 4. Wenn ein Leiter A sich in Beziehung auf einen Leiter B bewegt, so wird diejenige Bewegung, welche B erhält, wenn beiden Leitern eine solche gemeinschaftliche Bewegung ertheilt wird, daß A an seinem Orte verharret, die der Bewegung von A entgegengesetzte Bewegung genannt.

Wenn zwei geschlossene Leiter gegeben sind, so wird dieselbe elektromotorische Kraft inducirt, in welchen von beiden auch der inducirende Strom fließt, und welcher von beiden bewegt wird, nur muß die Bewegung des einen der Bewegung des andern entgegengesetzt sein.

Dieser Satz kann auch auf ungeschlossene Leiter ausgedehnt werden, wenn nur die Anordnung getroffen ist, daß derselbe Leiter, mag er ruhen oder bewegt werden, der Induktion dieselbe Länge darbietet.

§. 5. Die Bewegung eines Leiters in Beziehung auf einen Pol (Solenoid- oder Magnet-Pol) kann als zusammengesetzt angesehen werden aus der allen seinen Elementen gemeinschaftlichen progressiven Bewegung, welche auch der Pol haben würde, wenn er mit dem Leiter fest verbunden mit ihm zugleich bewegt würde, und aus einer um den auf die bezeichnete Weise bewegten Pol stattfindenden Drehung. Jene soll schlechtweg die progressive Bewegung des Leiters, diese die drehende Bewegung desselben heißen.

Der Differentialstrom der progressiven Bewegung ist

$$- \varepsilon \varepsilon' \kappa' \Gamma d\omega.$$

In dieser Formel ist statt der Bewegung des Leiters die entgegengesetzte des Pols substituirt gedacht; κ' bezeichnet den freien Magnetismus des Pols, $d\omega$ das Element seines Weges, und Γ die nach der Richtung von $d\omega$ zerlegte Wirkung, welche der Leiter, durchströmt von der Einheit des Stroms, auf die Einheit des freien Magnetismus im Pole ausübt.

Der Differentialstrom der drehenden Bewegung ist

$$- \varepsilon \varepsilon' \kappa' \{ \cos (a, e'') - \cos (a, e') \} d\psi,$$

wo $d\psi$ das Element des Drehungswinkels bedeutet, und (a, e'') und (a, e')

die Winkel bezeichnen, welche die Drehungsaxe mit den vom Pole nach den Endpunkten des Leiters gezogenen Linien bildet. Dieser Strom ist also unabhängig von der Form des Leiters und hängt allein von der Bewegung seiner Endpunkte ab; er ist immer gleich Null, wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet.

In einem geschlossenen Leiter, der sich um eine Axe dreht, in welcher ein oder mehrere Pole liegen, wird durch diese kein Strom inducirt.

§. 6. Die Induktion, welche in einem ruhenden Leiter durch die Bewegung eines Solenoid's erregt wird, ist allein von der Bewegung der Pole des Solenoid's abhängig.

Der durch die Bewegung eines Poles in einem ruhenden Leiter inducirte Strom besteht aus zwei Theilen; der eine rührt von der progressiven Bewegung des Pols her, der andere von seiner drehenden Bewegung um sich selbst. Der Differentialstrom des ersten Theils ist

$$- \epsilon \epsilon' \kappa' \Gamma d\omega$$

und der des zweiten Theils:

$$- \epsilon \epsilon' \kappa' \{ \cos (a, e'') - \cos (a, e') \} d\psi.$$

In einem geschlossenen ruhenden Leiter wird durch die Drehung des Pols kein Strom inducirt.

In einem nicht geschlossenen Leiter inducirt der Pol, ohne seinen Ort zu verändern, allein durch seine Drehung um sich selbst einen Strom. Dieser Satz enthält die Theorie der sogenannten unipolaren Induktion.

§. 7. Ein Magnet wird definirt als ein System von unendlich vielen unendlich kleinen Solenoiden (magnetischen Atomen). Der in einem bewegten Leiter durch einen Magneten inducirte Strom ist die Summe der Elementar-Ströme, welche durch seine Solenoide inducirt werden. Dieses System von Solenoiden kann durch ein System von Polen ersetzt werden, die allein auf der Oberfläche des Magneten vertheilt sind, d. i., die durch den Magneten in dem bewegten Leiter erregte Induktion kann als durch seine mit freiem Magnetismus belegte Oberfläche hervorgebracht angesehen werden. Diese magnetische Oberfläche ist dieselbe, welche nach dem Gauß'schen Satz auf einen äusseren Pol gleiche Wirkung wie der im Innern des Magneten vertheilte Magnetismus ausübt.

Man kann statt der Bewegung des Leiters die entgegengesetzte der magnetischen Oberfläche substituiren und umgekehrt. Wenn aber die magnetische Oberfläche bewegt gedacht wird oder wirklich sich bewegt, so hängt der inducirte Strom nicht allein von der Ortsveränderung ab, welche ihre Elemente erfahren, sondern auch von ihren dabei stattfindenden Drehungen. Der Theil des Induktionsstroms, welcher von der Drehung der Elemente der magnetischen Oberfläche herrührt, ist von der Gestalt des inducirten Leiters unabhängig; er hängt allein von der Lage der Endpunkte ab und verschwindet, wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet. —

Wenn das Element $D\omega$ der für den Magneten substituirt magnetischen Oberfläche den freien Magnetismus $\kappa.D\omega$ enthält, so ist der Differentialstrom, welcher durch die progressive Bewegung der Elemente inducirt wird,

$$- \epsilon \epsilon' \Sigma . \kappa \Gamma D\omega d\omega,$$

wo $d\omega$ das Element des Weges bezeichnet, welches $D\omega$ durchläuft, und Γ die nach $d\omega$ zerlegte Wirkung des von der Einheit des Stroms durchströmten Leiters auf die Einheit des freien Magnetismus in $D\omega$. Die Integration Σ bezieht sich auf die ganze Oberfläche ω des Magneten. — Der Differentialstrom, welcher durch die Drehung der Elemente inducirt wird, ist

$$- \epsilon \epsilon' \Sigma . \kappa \{ \cos (a, e'') - \cos (a, e') \} D\omega d\psi,$$

wo (a, e'') und (a, e') die Winkel bezeichnen, welche die Linien, die von dem Elemente $D\omega$ nach den beiden Enden des Leiters gezogen sind, mit der Drehungsaxe bilden; $d\psi$ ist das Element des Drehungswinkels.

§. 8. Nach den der Theorie des Magnetismus zu Grunde liegenden Vorstellungen besteht der Akt der Magnetisirung oder Entmagnetisirung in einer Trennung oder Vereinigung der magnetischen Flüssigkeiten innerhalb eines jeden Atoms des Magneten. Der Strom, welcher durch eine solche Bewegung der freien magnetischen Flüssigkeiten in einem geschlossenen Leiter inducirt wird, ist

$$- \epsilon \epsilon' \Sigma . (\kappa'' - \kappa') V D\omega,$$

wo $\kappa'.D\omega$ und $\kappa''.D\omega$ den freien Magnetismus in dem Element $D\omega$ der Oberfläche des Magneten vor und nach der Veränderung seines magnetischen Zustandes bezeichnen, und $V.D\omega$ das Potential des von der Einheit des Stroms durchströmten gedachten Leiters in Bezug auf das mit der Einheit des

Magnetismus erfüllte Element $D\omega$ ist. Die Integration Σ bezieht sich auf die ganze Oberfläche des Magneten.

§. 9. Die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche während der Bewegung in einem geschlossenen Leiter durch einen Magneten inducirt werden, ist gleich der Differenz der Werthe, welche das Potential des von dem Strome ϵ durchströmt gedachten Leiters, bezogen auf den ganzen Magneten (oder das Potential des Magneten bezogen auf den ganzen Leiter) im Anfang und am Ende der Bewegung annimmt. — Der Umstand, daß Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung und der durchlaufene Weg selbst in Beziehung auf die Summe der erregten elektromotorischen Kräfte gleichgültig sind, daß diese allein von der Veränderung abhängt, welche *das Potential des Magneten in Beziehung auf den Leiter* erfährt, führt zu der Folgerung, daß jede Ursache, welche den Werth dieses Potentials verändert, einen Strom inducirt, der zum Maafs hat: die hervorgebrachte Veränderung des Potentials dividirt durch den Widerstand seines Weges. Eine solche Ursache ist z. B. die Schwächung und Verstärkung des magnetischen Zustandes des Magneten. Dieser Satz giebt für den durch Magnetisirung oder Entmagnetisirung erregten Induktions-Strom denselben Ausdruck, der im vorigen § aufgestellt ist.

§. 10. Die in einem geschlossenen Leiter durch einen geschlossenen elektrischen Strom in Folge der Bewegung des Leiters oder des Stroms inducirte elektromotorische Kraft ist gleich der Veränderung des Werthes, welche durch diese Bewegung das in Beziehung auf den inducirenden Strom stattfindende Potential des von dem Strome ϵ durchströmt gedachten Leiters erfährt (oder das Potential dieses Stroms in Beziehung auf den Leiter). Der Ausdruck des inducirten Stroms ist

$$- \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j S \Sigma \cdot \frac{d^2}{dn d\nu} \left\{ \frac{1}{r''} - \frac{1}{r'} \right\} D\omega D\omega,$$

wo j die Stromstärke des inducirenden Stroms ist. Die Bedeutung der übrigen Zeichen ist folgende. Man denkt sich durch die Curve des Leiters eine beliebige durch sie begrenzte Oberfläche o gelegt und eine zweite ω durch die Curve des Inducenten und durch diese begrenzt. $D\omega$ und $D\omega$ sind Elemente dieser zwei Oberflächen und r' und r'' ihre Entfernungen vor und nach der Bewegung. Das nach n und ν genommene zweite Differential wird so verstanden, daß man zuerst den einen Endpunkt von r in der Normale an $D\omega$

um dn verrückt, und das hierdurch erhaltene Differential zum zweitenmal differentiirt, indem man den andern Endpunkt von r in der Normale an $D\omega$ um $d\nu$ fortrücken läßt. Die Integrationen S und Σ beziehen sich auf die Oberflächen o und ω .

Aus der Unabhängigkeit der inducirten elektromotorischen Kraft von der Bewegung an sich wird gefolgert, daß jede Ursache, welche eine Veränderung im Werthe des in Beziehung auf einen geschlossenen Leiter stattfindenden Potentials eines geschlossenen Stroms hervorbringt, einen Strom inducirt, dessen elektromotorische Kraft durch die Veränderung, welche das Potential erlitten hat, ausgedrückt ist. Ein ruhender elektrischer Strom inducirt demnach, wenn seine Intensität von j' bis j'' wächst, in einem ruhenden geschlossenen Leiter einen Strom, dessen Ausdruck ist:

$$-\frac{1}{2}\epsilon\epsilon'(j''-j')S\Sigma\cdot\frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\,d\nu}D_o\,D_\omega.$$

§. 11. Die inducirte elektromotorische Kraft hängt von einer dreifachen Integration ab, nämlich von den zwei Integrationen in Bezug auf die Curven des inducirenden Stroms und des inducirten Leiters und von einer dritten in Beziehung auf die Bahn, auf welcher die Elemente des Stroms oder des Leiters bewegt werden. Diese dreifache Integration läßt sich, wenn entweder der Leiter oder der Strom eine geschlossene Curve bilden, immer auf eine zweifache zurückführen.

Das Potential eines geschlossenen Stroms s in Beziehung auf einen andern geschlossenen Strom σ hat den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}jj'S\Sigma\cdot\frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r}Ds\,D\sigma,$$

wo j und j' die Intensitäten der Ströme s und σ bezeichnen, Ds und $D\sigma$ ihre Elemente, r deren Entfernung von einander und $(Ds, D\sigma)$ den Winkel, unter welchem Ds gegen $D\sigma$ geneigt ist. — Die beiden Elemente Ds und $D\sigma$ der geschlossenen Ströme s und σ ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft an, die gleich ist:

$$\frac{1}{2}jj'\cdot\frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r^2}Ds\,D\sigma.$$

Wenn ein ungeschlossener Leiter s unter dem Einfluß eines geschlossenen Stroms σ bewegt wird, so ist die Summe der während dieser Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte

gleich dem Potential des Stroms σ in Bezug auf die geschlossene Umgränzung der Oberfläche, welche der Leiter beschrieben hat, diese umgränzenden Curven, nämlich die beiden des Leiters selbst in seiner Anfangs- und Endposition und die während der Bewegung von seinen beiden Endpunkten beschriebenen, durchströmt gedacht von dem Strome ϵ .

Dies Theorem giebt, wenn der inducirte Leiter geschlossen ist, den Satz des vorigen § über die Induktion eines geschlossenen Leiters durch einen geschlossenen Strom. Es folgt ferner aus demselben Theorem der Satz:

Wenn ein ungeschlossener Leiter eine geschlossene Bahn durchlaufen hat, d. h. wenn er am Ende der Bewegung in die Lage, aus welcher er ausging, zurückgekehrt ist, so ist die auf dieser Bahn durch einen geschlossenen Strom inducirte elektromotorische Kraft die Differenz der Werthe des Potentials des Stroms in Beziehung auf die zwei Curven, welche die Endpunkte des Leiters durchlaufen haben, diese Curven von dem Strome ϵ durchströmt gedacht.

Wenn ein geschlossener Leiter in einer geschlossenen Bahn unter dem Einfluß eines geschlossenen Stroms bewegt worden ist, so ist die Summe der inducirten elektromotorischen Kräfte immer gleich Null.

Diese Sätze gelten auch, wenn die Induktion nicht durch einen geschlossenen Strom, sondern durch einen Magneten hervorgebracht wird.

Auf den Fall, auf welchen die vorstehenden Sätze sich beziehen, den Fall nämlich der Bewegung eines Leiters unter dem Einfluß eines inducirenden geschlossenen Stroms, lassen sich derjenige, wo der geschlossene Strom statt des Leiters bewegt wird, sowie die Fälle zurückführen, wo der inducirte Leiter geschlossen, der inducirende Strom aber nicht geschlossen ist, es mag der Leiter oder der Strom bewegt werden.

§. 12. Die Kegelöffnung einer geschlossenen Curve in Bezug auf einen Punkt wird das Kugelflächenstück genannt, welches der aus dem Punkte durch die Curve gelegte Kegel von der um diesen Punkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche abschneidet.

Das Potential eines Solenoids, dessen Wirkung nach außen durch die des freien Magnetismus κ' an seinen Enden ersetzt werden kann, hat in Bezug auf einen geschlossenen Strom s von der Intensität 1 den Werth

$$\kappa' (K'' - K'),$$

wo K'' und K' die Kegelöffnungen der Curve s in Bezug auf die Pole des Solenoid's sind.

Das Potential eines Magneten in Bezug auf einen geschlossenen Strom s von der Intensität 1 ist

$$S. \kappa K D\omega,$$

wo $\kappa.D\omega$ den freien Magnetismus auf dem Element $D\omega$ der Oberfläche des Magneten und K die Kegelöffnung von s in Bezug auf dieses Element vorstellt. Das Integral S ist auf die ganze Oberfläche des Magneten auszudehnen.

Wenn dieser Magnet aus der Lage ω , in die Lage ω'' fortgeführt wird, so ist der dadurch in s inducirte Strom:

$$- \epsilon \epsilon' S. \kappa (K'' - K') D\omega,$$

wo K' und K'' die Werthe von K in der Lage ω' und ω'' bezeichnen.

Der in einem ungeschlossenen Leiter, welcher eine geschlossene Bahn durchlaufen hat, inducirte Strom ist:

$$- \epsilon \epsilon' S. \kappa (K'' - K') D\omega,$$

wo K' und K'' die Kegelöffnungen der von den Endpunkten des Leiters beschriebenen geschlossenen Curven in Bezug auf den Punkt bezeichnen, in dem sich das Element $D\omega$ befindet.

Ist weder der Leiter noch seine Bahn eine geschlossene Curve, so ist der in ihm durch den Magneten inducirte Integralstrom:

$$- \epsilon \epsilon' S. \kappa K D\omega,$$

wo K die Kegelöffnung der geschlossenen Umgränzung der Oberfläche, welche der Leiter beschrieben hat, in Bezug auf das Element $D\omega$ ist.

Wenn der magnetische Zustand des Magneten eine Änderung erleidet, so daß der freie Magnetismus $\kappa.D\omega$ des Elements $D\omega$ der Oberfläche des Magneten sich in $\kappa'.D\omega$ verwandelt, so wird dadurch in dem ruhenden geschlossenen Leiter ein Strom inducirt, dessen Werth ist:

$$- \epsilon \epsilon' S. (\kappa' - \kappa) K D\omega,$$

wo K die Kegelöffnung von s in Bezug auf $D\omega$ ist.

Regeln, nach welchen das Vorzeichen von K bestimmt wird, und ob für K das kleinere oder grössere Kugelflächenstück zu nehmen ist, welches der Kegel abschneidet.

§. 13. Anwendungen der Formeln des vorigen § auf einige einfache specielle Fälle von Induktionen.

1) Es wird der Strom bestimmt, welcher durch den Erdmagnetismus in einem ebenen geschlossenen Leiter, der um eine Axe rotirt, inducirt wird. Der Inhalt des von dem Leiter eingeschlossenen ebenen Raums sei F , das auf seiner Ebene errichtete Perpendikel sei gegen die Drehungsaxe unter dem Winkel c geneigt, diese letztere bilde mit der Richtung der magnetischen Inklination den Winkel (a, r) ; der Drehungswinkel ϕ werde von der Lage der Leiter-Ebene an gerechnet, in welcher sie auf der durch die Drehungsaxe und die Richtung der magnetischen Inklination gelegten Ebene senkrecht steht; M bezeichne die Stärke des Erdmagnetismus. Nach diesen Bestimmungen wird der durch eine Drehung des Leiters von ϕ' bis ϕ'' in ihm inducirte Integralstrom

$$- \epsilon \epsilon' M F \sin(a, r) \sin c \{ \cos \phi'' - \cos \phi' \}.$$

2) In allen folgenden Anwendungen ist der Inducit ein prismatischer Magnet, dessen freier Magnetismus κ als gleichförmig über seine beiden Grundflächen vertheilt angesehen werden kann, die in Bezug auf ihre Entfernung von den Elementen des inducirten Leiters als klein betrachtet werden.

Formeln für die Ströme, welche in kreisförmigen Leitern oder in cylindrischen Spiralen durch Magnetisirung oder Ortsveränderung des Magneten inducirt werden. — Der Magnet, dessen Grundfläche durch f bezeichnet wird, befinde sich in einer Spirale, von welcher er ganz bedeckt sei; ihre Länge sei L , ihr Durchmesser R und die Anzahl ihrer Windungen sei N . Der in dieser Spirale durch den Akt der Magnetisirung inducirte Strom ist

$$- 4 \pi \epsilon \epsilon' \kappa f N \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2} - \frac{R}{L} \right\},$$

also, wenn $\frac{R}{L}$ klein ist, proportional der Anzahl der Windungen und unabhängig von ihrem Durchmesser.

Derselbe Strom wird inducirt, wenn die Spirale dem Magneten aus grosser Entfernung genähert und auf ihn gesteckt wird.

3) Derselbe Magnet ist hufeisenförmig gebogen; die beiden Pole werden mit o und u bezeichnet, die Mitte von ou durch m . Durch m geht senkrecht auf ou eine Drehungsaxe, mit welcher ein kreisförmiger Leiter, dessen Mittelpunkt C ist, so verbunden ist, daß die Linie mC auf ihr und der Ebene des Leiters senkrecht steht. Jede halbe Umdrehung, durch welche C aus der Linie ou heraus und wieder hineingeführt wird, inducirt den Strom

$$4\pi\epsilon\epsilon'\kappa f \left\{ 2 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + R^2}} - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + R^2}} \right\},$$

wo die Linie $mo = mu$ mit a , der Halbmesser des Leiters mit R und die Linie mC mit x bezeichnet ist. Damit die Drehung möglich sei, muß $x^2 + R^2 < a^2$ sein.

4) Mit derselben Drehungsaxe sei ein kreisförmiger Leiter vom Halbmesser R so verbunden, daß seine Ebene auf ihr senkrecht steht und sein Mittelpunkt um $mo = a$ von ihr entfernt ist; die Entfernung der Pole von der Leiter-Ebene sei x . Der durch eine halbe Umdrehung, durch welche der Mittelpunkt des Leiters aus der kleinsten Entfernung von dem einen Pole in die kleinste Entfernung von dem andern Pole geführt wird, inducirte Strom hat den angenäherten Werth:

$$-4\pi\epsilon\epsilon'\kappa f \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \frac{\frac{1}{2}R^2x}{(4a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

5) Der im Vorigen betrachtete prismatische Magnet, dessen Länge h sei, rotire um seine Axe uo ; mit ihr seien fest verbunden zwei leitende kreisförmige Scheiben mit den Halbmessern R und R' , senkrecht auf ou stehend, deren Mittelpunkte C und C' in der über o verlängerten Axe uo von o um x und x' entfernt liegen. Diese Scheiben sind leitend unter einander verbunden; während der Magnet mit ihnen rotirt, schleifen gegen ihre Ränder zwei Metall-Federn, die durch einen Leitungsdrath, z. B. den Multiplicator-Drath, verbunden sind. Diese Federn mit ihrem Verbindungs-Drath bilden einen ruhenden ungeschlossenen Leiter, in welchem durch die Rotation des Magneten um seine Axe ein Strom inducirt wird, dessen Ausdruck ist:

$$2\pi\epsilon\epsilon'\kappa f \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + R^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + R'^2}} + \frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2 + R'^2}} \right\}.$$

Setzt man hierin $R' = 0$ und $x = -\frac{1}{2}h$, so erhält man die vortheilhafteste Anordnung für die Weber'sche unipolare Induktion; der bei dieser Anordnung inducirte Strom ist

$$\frac{-4\pi\epsilon\epsilon'kf}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{h}\right)^2}}.$$

Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme.

§. 1.

Herr Lenz hat, um die Richtung eines inducirten Stroms zu bestimmen, folgenden Satz gegeben ⁽¹⁾:

Wenn sich ein metallischer Leiter in der Nähe eines galvanischen Stromes oder eines Magneten bewegt, so wird in ihm ein Strom erregt, der eine solche Richtung hat, daß er in dem Drathe, wenn er in Ruhe wäre, eine gerade entgegengesetzte Bewegung hervorbringen würde, wofern man denselben nur in der Richtung der ertheilten Bewegung und der entgegengesetzten beweglich voraussetzt.

Eine weitere Reflexion über diesen schönen Satz und seine Verbindung mit dem Satz: daß die Intensität der momentanen Induktion proportional ist der Geschwindigkeit, mit welcher der Leiter bewegt wird, hat mich zu einem einfachen und allgemeinen Induktions-Gesetz geführt, welches, soweit fremde und eigne Beobachtungen vorliegen, sich in seinen Folgerungen überall als richtig bewährt hat. Dieses Gesetz enthält den Lenzschen Satz in Beziehung auf die Richtung des inducirten Stroms, und erlaubt in jedem einzelnen Falle, seine Intensität numerisch zu bestimmen. Die Auseinandersetzung desselben ist die Absicht der folgenden Abhandlung.

Der Lenzsche Satz läßt sich auch so aussprechen: die nach der Richtung der Bewegung des Leiters zerlegte Wirkung des inducirenden auf den inducirten Strom ist immer negativ.

(¹) Pogg. Annalen der Physik und Chemie. Bd. 31. S. 483.

Wir denken uns zunächst den Leiter parallel mit sich selbst bewegt, so daß alle Elemente Ds desselben die Geschwindigkeit v haben, und nehmen an, daß die nach der Richtung der Bewegung stattfindende Componente der Wirkung des inducirenden Stromes auf ein Element des bewegten Drathes für jedes Element denselben Werth habe, welchen wir mit $C.Ds$ bezeichnen wollen in dem Falle, daß das Element von einem Strome mit der Intensität $= 1$ durchströmt ist. Die Summe dieser Componenten in Beziehung auf den ganzen bewegten Drath, dessen Länge λ sei, $C\lambda$ bezeichne ich durch C' . Diese Componente C' wird also, wenn der bewegte Drath von einem Strome mit der Intensität $+k$ durchströmt wird, gleich kC' . Soll dies der inducirte Strom sein, so muß k proportional der momentanen Geschwindigkeit v oder $k = Lv$ sein, wodurch die Componente wird: $LC'v$. Nach dem Lenzschen Satze ist $LC'v$ immer eine negative Gröfse. Hieraus geht hervor, daß, da C' mit der Richtung der Bewegung sein Vorzeichen ändert, L eine Funktion von C' sein muß, und zwar eine solche, welche zu gleicher Zeit mit C' ihr Vorzeichen ändert. Die einfachste Annahme, die man in dieser Hinsicht machen kann, und die in ihren Folgerungen sich als genügend erweist, ist, daß man, wenn e einen konstanten Coefficienten bedeutet, setzt: $L = -eC'$.

Der momentane inducirte Strom erhält also den Ausdruck: $-evC'$. Dieser Strom befolgt in Beziehung auf Fortleitung und Verzweigung die bekannten Ohmschen Gesetze. Wir müssen in seinem Ausdrücke also unterscheiden den Theil, welcher von dem Widerstand herrührt und den Theil, welcher analog der elektromotorischen Kraft ist. Nennen wir l die durch die Leitungsfähigkeit dividirte Länge des Weges, welchen der inducirte Strom zu durchlaufen hat, sei es, daß dieser ganz aus dem bewegten oder zum Theil aus einem ruhenden Leiter gebildet wird, und setzen wir $e = \frac{\epsilon}{l}$, so wird der Ausdruck für den inducirten Strom: $-\frac{\epsilon v C'}{l}$, wo nun $-\epsilon v C'$ seine elektromotorische Kraft bezeichnet. Da nach der Voraussetzung v und C für jedes Element des inducirten Leiters denselben Werth haben, so nimmt jedes Element einen gleichen Antheil an der Induktion, d. h. in jedem Element wird eine gleiche elektrom. Kraft inducirt, welche man erhält, wenn die ganze elektrom. Kraft $-\epsilon v C'$ multiplicirt wird durch $\frac{1}{\lambda}Ds$, und dies giebt: $-\epsilon v C.Ds$. Der von dieser elementaren elektromotorischen Kraft herrührende Strom ist: $\frac{-\epsilon v C.Ds}{l}$.

Bei dieser Herleitung des Ausdrucks für die elementare inducirte elektromotorische Kraft lag die Vorstellung zu Grunde, daß alle Elemente des inducirten Drathes dasselbe v haben. Aber offenbar bleibt dieser Ausdruck ungeändert, wenn man einen größern oder geringern Theil des Leiters ruhen läßt, d. h. für diesen Theil $v = 0$ macht, oder wenn man dem Leiter eine solche Gestalt giebt, daß für einen Theil desselben $C = 0$; hieraus geht hervor, daß die in dem bewegten Element inducirte elektr. Kraft unabhängig ist von dem Zustand der übrigen Elemente, und hieraus folgt, daß der gefundene Ausdruck für die inducirte elementare elektr. Kraft unabhängig ist von der Voraussetzung, daß alle Elemente des Leiters denselben Werth von v und C besitzen.

Demnach spricht sich das allgemeine Induktions-Gesetz so aus: die in einem Elemente des bewegten Drathes inducirte elektrom. Kraft ist gleich einer Konstante ϵ multiplicirt mit der Geschwindigkeit des Elements und mit der nach der negativen Richtung der Bewegung zerlegten Wirkung des inducirenden Stromes auf das Element, dieses durchströmt gedacht von einem positiven Strom mit der Intensität $= 1$. Bezeichnet man mit $E.Ds$ die elementare inducirte elektrom. Kraft, so ist also:

$$E.Ds = -\epsilon v C.Ds, \quad (1)$$

wo v und C im Allgemeinen Funktionen der Coordinaten des Orts des Elements sind, die ihrerseits Funktionen der Zeit sind.

Was die Constante ϵ betrifft, so haben Faraday und Lenz gezeigt, daß sie unabhängig von der Beschaffenheit des Leiters ist; ihr numerischer Werth hängt also nur von den Einheiten der Länge, der Zeit und der Stromstärke ab. Indessen giebt es Induktions-Erscheinungen, welche nur durch die Annahme erklärt werden zu können scheinen, daß eine momentan wirkende Ursache die elektrom. Kraft nicht bloß momentan inducirt, sondern während einer gewissen wenn auch äußerst kurzen Zeit, wonach ϵ also nicht constant, sondern eine Funktion der Zeit ist, die aber verschwindet, wenn ihr Argument nicht sehr klein ist. Ich werde diesen Umstand später weiter auseinandersetzen, wenn ich die hier für lineare Induktion zu entwickelnden Principien auf die in bewegten Flächen und Körpern inducirten Ströme ausdehnen werde, wo sein Einfluß vorzugsweise bemerklich wird, wie dies die

Theorie der Aragoschen Scheibe zeigen wird. Hier will ich nur bemerken, daß diese nicht momentane Induktion bei Dräthen ohne erheblichen Einfluß auf die Summe der elektrom. Kräfte ist, die während einer gewissen Zeit erregt werden, und ohne allen Einfluß, wenn die inducirende Ursache am Anfange und Ende dieser Zeit denselben Werth hat, z. B. wenn sie periodisch wirkt.

§. 2.

In einem geschlossenen lineären Leiter, in welchem ich die Länge eines unbestimmten Stücks, gerechnet von einem festen Querschnitt, durch s bezeichne, werde in jedem Element zur Zeit t die elektromotorische Kraft $E.Ds$ erregt, wo E eine Funktion von s und t ist: es soll die daraus hervorgehende Stromstärke bestimmt werden. Wäre E unabhängig von t und allein eine Funktion von s , so könnte diese Stromstärke sofort nach dem Ohm'schen Satze bestimmt werden, daß die Stromstärke in einem geschlossenen Leiter gleich ist der Summe der elektromotorischen Kräfte, dividirt durch den Leitungswiderstand, und nennen wir diesen w , so wäre die Stromstärke $\frac{1}{w} \int E.Ds$, die Integration über den ganzen Leiter ausgedehnt. Dieser Satz beruht aber auf der Voraussetzung eines stationären, d. h. von der Zeit unabhängigen Zustandes der Strömung, welcher, wenn E eine Funktion von t ist, nicht vorhanden ist. Ich werde aber nachweisen, daß dessen ungeachtet dieser Satz angewandt werden kann, wenn sich E nur nicht äußerst rasch mit t verändert. Diese Nachweisung beruht darauf, daß der absolute Werth der Leitungsfähigkeit des erregten Leiters, welche wir mit k bezeichnen, außerordentlich groß ist; man muß sich diese Größe vorstellen als von der Ordnung des Quadrats der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität in dem Leiter; wir besitzen kein Mittel, ihren Werth näher zu begrenzen.

Die erregte elektrom. Kraft denken wir uns als eine Folge der durch die Induktion erregten elektrischen Spannung. Ich bezeichne diese zur Zeit t in Ds erregte elektrische Spannung mit U , wo U also eine Funktion von s und t ist. Die erregte elektrom. Kraft ist hiernach: $-\frac{dU}{ds} Ds = E.Ds$ und die in Folge dieser Erregung durch einen Querschnitt q strömende Elektrizitäts-Menge ist $-qk \frac{dU}{ds} = qkE$. Ich bezeichne durch u die zur Zeit t bereits vorhandene elektrische Spannung. In Folge dieser vorhandenen Spannung strömt durch einen Querschnitt q die Elektrizitätsmenge $-qk \frac{du}{ds}$ und

diese ertheilt dem Elemente Ds einen Zuwachs an Spannung, welcher $= qk \frac{d^2 u}{ds^2} Ds$. Fände keine erregte Strömung statt, so würde hieraus sich ergeben:

$$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2 u}{ds^2}. \quad (1)$$

Die erregte Strömung qkE vermehrt aber den Zuwachs der elektrischen Spannung um $- qk \frac{dE}{ds} Ds$, so daß unter dem Einfluß der Induktion die Gleichung statt findet:

$$\frac{du}{dt} = k \left\{ \frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{dE}{ds} \right\}. \quad (2)$$

Ist aus dieser Gleichung u bestimmt worden, so ist die einen Querschnitt q durchströmende Elektrizitätsmenge oder die Stromstärke

$$- kq \left(\frac{du}{ds} - E \right).$$

Das vollständige Integral von (2) besteht aus zwei Theilen, von welchen der eine das Integral von (1) ist, der zweite von der Funktion E abhängt. Der erste Theil läßt sich durch eine Reihe darstellen, welche nach den negativen Potenzen von e^{kt} fortschreitet, wo e die Basis des natürlichen Logarithmen-Systems ist, und verschwindet wegen des großen Werthes, den k besitzt, für irgend merkliche Werthe von t . Der zweite Theil kann durch eine Reihe dargestellt werden, die nach den negativen Potenzen von k fortschreitet, nemlich

$$u = a + bs + \int E ds + \frac{1}{k} \int \frac{dE}{dt} ds^3 + \frac{1}{k^2} \int \frac{d^2 E}{dt^2} ds^5 + \dots,$$

wo a und b zwei willkürliche Constanten bedeuten. Hieraus geht hervor, daß wenn E sich nicht äußerst rasch mit der Zeit verändert, so daß sein Differentialquotient nach t einen mit k vergleichbaren Werth erhält, man setzen kann:

$$u = a + bs + \int E ds.$$

Ist der Leiter geschlossen und bezeichnet man seine Länge durch L , so muß für $s = 0$ und für $s = L$ sowohl die Spannung u als die Stromstärke $- kq \left(\frac{du}{ds} - E \right)$ denselben Werth haben. Die zweite Bedingung erfüllt sich von selbst; die erste giebt: $a = a + bL + \int_0^L E ds$, so daß die eine Constante

a unbestimmt bleibt, und für b folgt: $b = -\frac{1}{L} \int_0^L E ds$. Hieraus ergibt sich die Stromstärke:

$$-qk \left(\frac{du}{ds} - E \right) = \frac{qk}{L} \int_0^L E ds,$$

wodurch die Anwendung des Ohmschen Satzes, daß die Stromstärke gleich ist der Summe der elektromotorischen Kräfte, dividirt durch den Widerstand des Weges, auch für den Fall gerechtfertigt ist, wenn die elektrom. Kräfte Funktionen der Zeit sind. Ich habe der Einfachheit wegen die Leiter als homogen und von constantem Querschnitt vorausgesetzt; die entgegengesetzte Annahme ändert aber nichts Wesentliches an diesem Satze.

§. 3.

Aus den beiden vorhergehenden §§ ergibt sich, daß allgemein die inducirte Stromstärke ausgedrückt wird durch das Integral

$$- \epsilon \epsilon' S. v C D s,$$

wo ϵ' den reciproken Werth des Widerstandes der Leitung bedeutet und die Summation auf den ganzen bewegten Leiter auszudehnen ist.

Die Stromstärke wird durch die Wirkung gemessen, welche der Strom in einer gewissen Zeit z. B. auf eine Magnethadel hervorbringt. Wir nehmen an, daß der constante Coefficient ϵ so bestimmt worden sei, daß der vorstehende Ausdruck die Wirkung bezeichnet, welche durch den Strom in dem Falle, daß er constant ist, in der Einheit der Zeit hervorgebracht wird. Dann ist bei variabler Stromstärke seine Wirkung während des Zeitelements dt :

$$(1) \quad - \epsilon \epsilon' dt S. v C D s$$

und seine Wirkung während des Zeitraums von t_0 bis t_1 :

$$(2) \quad - \epsilon \epsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt S. v C D s.$$

Die Summation, welche durch S bezeichnet wird, ist immer für den ganzen bewegten Theil des inducirten Leiters zu nehmen.

Den Strom (1) nenne ich den Differential-Strom, und den Strom (2) den Integral-Strom. Ich bezeichne diese Ströme respective mit D

und J . Gewöhnlich ist es der Integral-Strom, welcher gemessen wird; der Differential-Strom läßt sich, wenn nicht etwa sein Zeitelement gemessen wird, nur wenn er constant ist, direkt beobachten, und dann durch eine andre constante Kraft, mit welcher er ein Gleichgewicht bildet, z. B. den Erdmagnetismus, messen.

Die beiden Ausdrücke (1) und (2) lassen sich in eine andere Form bringen. Nennt man $d\omega$ das Element des Weges ω , welches von dem Drath-Element Ds während dt beschrieben wird, so ist $v = \frac{d\omega}{dt}$, und man erhält den Differentialstrom

$$D = -\epsilon\epsilon' S.Cd\omega Ds \quad (3)$$

und den Integralstrom

$$J = -\epsilon\epsilon' \int_{\omega_0}^{\omega_1} S.Cd\omega Ds, \quad (4)$$

wo ω_0 und ω_1 die Orte der Bahn ω des Leiters bezeichnen, an welchen sich derselbe zu den Zeiten t_0 und t_1 befand. Hiernach kann der Differentialstrom definirt werden als der auf dem unendlich kleinen Wege $d\omega$ inducirte Strom, und der Integralstrom als der, welcher auf dem ganzen Wege von ω_0 bis ω_1 inducirt ist. Beide Ströme sind, wie sich hieraus ergibt, von der Geschwindigkeit unabhängig und hängen nur von der Lage und Länge des Weges ab.

Das Produkt $\epsilon C d\omega Ds$ ist das virtuelle Moment der Kraft, welche der inducirende Strom in Bezug auf das Element Ds ausübt, wenn man sich dieses von einem Strome ϵ durchströmt vorstellt; ich nenne es kurzweg das virtuelle Moment des Inducenten. Die elektrom. Kraft des Differentialstroms ist demnach das negative virtuelle Moment des Inducenten in Bezug auf den ganzen bewegten Leiter; die elektrom. Kraft des Integralstroms ist die Summe dieser virtuellen Momente, welche auf dem Wege von ω_0 bis ω_1 erzeugt werden. Da diese Summe der virtuellen Momente zugleich das Maafs der auf dem Wege von ω_0 bis ω_1 entwickelten lebendigen Kraft ist, so kann man auch sagen: die elektrom. Kraft des Integralstroms ist der Verlust an lebendiger Kraft, welchen der Inducent in dem bewegten Leiter auf dem Wege von ω_0 bis ω_1 hervorbringt, den Leiter immer von dem constanten Strome ϵ durchströmt gedacht. Der effective Verlust an lebendiger Kraft, welchen der Leiter durch die Induction

in dem Zeitraum von t_0 bis t_1 erfährt, wenn er sich frei z. B. in Folge seiner Trägheit bewegt, ist:

$$-2\varepsilon\varepsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt (S.vCDs)^2.$$

Die drei rechtwinkligen Coordinaten des Elements Ds bezeichne ich durch x, y, z und seine Projektionen auf diese Coordinaten durch Dx, Dy, Dz . Die Projektionen des Elements $d\omega$ des Weges, auf welchem Ds fortbewegt wird, seien dx, dy, dz , und die drei mit ihnen parallelen Componenten der Wirkung des Inducen auf Ds , wenn Ds von der Einheit des Stroms durchströmt wird,

$$X_\varepsilon Ds, \quad Y_\varepsilon Ds, \quad Z_\varepsilon Ds.$$

Diese Componenten sollen positiv genannt werden, wenn ihre Richtung die positive der Coordinaten ist.

Hiernach ist:

$$C.Ds = Ds \left\{ X_\varepsilon \frac{dx}{d\omega} + Y_\varepsilon \frac{dy}{d\omega} + Z_\varepsilon \frac{dz}{d\omega} \right\}$$

und dieser Werth in (3) und (4) gesetzt giebt

$$(5) \quad D = -\varepsilon\varepsilon' S.Ds \{ X_\varepsilon dx + Y_\varepsilon dy + Z_\varepsilon dz \},$$

$$(6) \quad J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S.Ds \{ X_\varepsilon dx + Y_\varepsilon dy + Z_\varepsilon dz \}.$$

Das Summenzeichen S bezieht sich immer auf das Element Ds des bewegten Leiters und $\int$ auf das Element $d\omega$ des Weges, auf welchem Ds sich bewegt.

Die Verhältnisse der Projektionen $dx : dy : dz$ sind durch die Natur der Curve ω gegebene Funktionen von x, y, z , welche im Allgemeinen noch von s abhängen. Bewegt sich der Leiter parallel mit sich selbst, so haben dx, dy, dz für alle Elemente Ds denselben Werth, und in diesem Falle kann man schreiben:

$$(7) \quad J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} (dx S.X_\varepsilon Ds + dy S.Y_\varepsilon Ds + dz S.Z_\varepsilon Ds).$$

Wenn die unter dem Integralzeichen $\int$ stehende Gröfse das vollständige Differential einer Funktion von x, y, z ist, welche ich mit V bezeichnen will, so dafs

$$(8) \quad dV = dx S.X_\varepsilon Ds + dy S.Y_\varepsilon Ds + dz S.Z_\varepsilon Ds,$$

so wird

$$J = -\epsilon\epsilon' (V_{w_1} - V_{w_0}). \quad (9)$$

Setzt man $\epsilon V = p$, wo p eine willkürliche Constante ist, so ist die Gleichung einer der Gleichgewichtsoberflächen einer Flüssigkeit von constanter Dichtigkeit ϵ , auf welche die drei rechtwinklichen Kräfte $S.X.Ds$, $S.Y.Ds$, $S.Z.Ds$ wirken, und p der auf ihr senkrechte constante Druck, der nur von einer Oberfläche zur andern variirt. Schreibt man also statt (9):

$$J = -\epsilon' (p_{w_1} - p_{w_0}), \quad (10)$$

so sieht man, daß wenn der Leiter sich parallel mit sich selbst bewegt und die Bedingung (8) erfüllt ist, die elektrom. Kraft des Integralstroms definirt ist durch die Differenz des Drucks auf den beiden Gleichgewichts-Oberflächen, welche durch die Endpunkte der Bahn des Leiters gelegt sind, so daß dieser Integralstrom unabhängig ist von der Lage und Länge des Weges, auf welchem der Leiter von der einen Oberfläche zur andern gelangt ist.

§. 4.

In dem Ausdruck für die in dem Element Ds inducirte elektromotorische Kraft: $-\epsilon v C.Ds$ ist C die Summe der nach der Richtung der Bewegung von Ds zerlegten Kräfte, mit welchen die einzelnen Elemente des Inducen ten auf die Einheit des Stroms in Ds wirken. Ich werde mit σ den Bogen des Inducen ten bezeichnen, mit $D\sigma$ sein Element, und mit $c.D\sigma$ die nach der Richtung der Bewegung von Ds zerlegte Wirkung, welche $D\sigma$ auf die Einheit des Stroms in Ds ausübt. Dann ist der Antheil, welchen das Element $D\sigma$ an die in Ds inducirte elektromotorische Kraft nimmt:

$$-\epsilon v c.Ds D\sigma.$$

Dies ist der Ausdruck für die elementare Induktion, welche zwischen dem Element des Inducen ten und dem Element des bewegten Leiters stattfindet. Die doppelte Integration dieses Ausdrucks nach der ganzen Länge von s und nach der ganzen Länge von σ giebt die elektromotorische Kraft, welche der ganze Inducen t in dem ganzen bewegten Leiter hervorruft. Ich werde diese Integrationen nach Ds und $D\sigma$ immer durch die Zeichen S und Σ unterscheiden.

Die Betrachtungen, welche zu dem vorstehenden Ausdrucke für die elementare Induktion geführt haben, gingen von der Vorstellung aus, daß der Inducen^t ruhe und der inducirte Leiter bewegt werde. Die Induktion kann aber nur abhängig sein von der relativen Bewegung der Elemente. Denn man kann beiden Elementen außer den Bewegungen, welche sie besitzen, noch eine solche gemeinschaftliche geben, daß das eine oder das andere Element in Ruhe bleibt, und diese beiden Elementen gemeinschaftliche Bewegung kann keine Induktion hervorbringen, denn sonst würde auch in dem neben dem Inducenten ruhenden Leiter schon durch die Bewegung der Erde ein Strom erregt werden müssen. Es wird also dieselbe elektromotorische Kraft erregt, wenn das Element des Leiters Ds , oder das Element des Inducenten $D\sigma$ in entgegengesetzter Richtung bewegt wird. Wir wollen nun annehmen, das Element des Inducenten $D\sigma$ werde mit der Geschwindigkeit v bewegt, wo jetzt v , unabhängig von s , eine Funktion von σ ist. Die inducirte elektromotorische Kraft ist: $+\epsilon v c Ds D\sigma$, wo $c Ds D\sigma$ die nach der Richtung der Bewegung von $D\sigma$ zerlegte Wirkung des Elements $D\sigma$ auf die Einheit des Stroms in Ds ist. Bezeichnen wir mit γ die nach der Richtung der Bewegung von $D\sigma$ zerlegte Gegenwirkung, welche die Einheit des Stroms in Ds auf $D\sigma$ ausübt, wo also $\gamma = -c$, so wird die inducirte elektrom. Kraft: $-\epsilon v \gamma Ds D\sigma$. Wenn das Integral $\int \gamma Ds$, auf die ganze Länge von s ausgedehnt, durch Γ bezeichnet wird, so wird die elektrom. Kraft, welche in dem ganzen Leiter durch die Bewegung eines Elements des Inducenten erregt wird und welche durch $E'. D\sigma$ bezeichnet werden soll:

$$(1) \quad E'. D\sigma = -\epsilon v \Gamma. D\sigma,$$

wo Γ die nach der Richtung der Bewegung von $D\sigma$ zerlegte Wirkung des ganzen ruhenden Leiters, wenn er von der Einheit des Stroms durchströmt gedacht wird, auf das Element $D\sigma$ vorstellt.

Hieraus ergiebt sich der Werth des Differentialstroms D' , welcher in dem ruhenden Leiter durch die Bewegung des inducirenden Leiters erregt wird:

$$(2) \quad D' = -\epsilon \epsilon' dt \sum v \Gamma D\sigma,$$

und der Integralstrom J' wird

$$(3) \quad J' = -\epsilon \epsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt \sum v \Gamma D\sigma.$$

Wird der Weg, auf welchem $D\sigma$ fortbewegt wird, durch ω und sein Element durch $d\omega$ bezeichnet, dann ist

$$D' = -\epsilon\epsilon' \sum \Gamma d\omega D\sigma, \quad (4)$$

$$J' = -\epsilon\epsilon' \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sum \Gamma d\omega D\sigma. \quad (5)$$

Der für die elektrom. Kraft in (1) dieses § gegebene Ausdruck fällt mit dem Ausdruck (1) in § 1 zusammen, wenn man, mag sich der inducirende Strom im ruhenden oder bewegten Leiter befinden, $C.Ds$ oder $\Gamma.D\sigma$ so definirt, daß dadurch immer die nach der Richtung der Bewegung des bewegten Elements zerlegte Wirkung des ruhenden Leiters auf das bewegte Element bezeichnet wird, den inducirten Leiter von der Einheit des Stroms durchströmt gedacht. Hieraus folgt der Satz: Wenn von zwei Leitern A und B der Leiter A sich gegen B bewegt, so wird dieselbe elektromotorische Kraft erzeugt, der inducirende Strom mag in A oder B fließen, und die in B oder A inducirten Ströme verhalten sich umgekehrt wie die Leitungswiderstände ihrer Bahnen. Ich werde jetzt nachweisen, daß es, wenn die Leiter A und B geschlossen sind, gleichgültig ist, ob A bewegt wird oder B in der entgegengesetzten Richtung; es wird in beiden Fällen dieselbe elektromotorische Kraft erzeugt.

Die Ordinaten eines Elements $d\omega$ des Weges ω , auf welchem das inducirende Element $D\sigma$ fortgeführt wird, werde ich mit ξ, η, ζ bezeichnen, und die Projektionen von $d\omega$ mit $d\xi, d\eta, d\zeta$. Die drei rechtwinkligen Componenten der Wirkung, welche auf das inducirende Element $D\sigma$ von dem ruhenden Leiter s ausgeübt wird, wenn dieser von der Einheit des Stroms durchströmt wird, sollen mit $X_s D\sigma, Y_s D\sigma, Z_s D\sigma$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\Gamma D\sigma = \left\{ X_s \frac{d\xi}{d\omega} + Y_s \frac{d\eta}{d\omega} + Z_s \frac{d\zeta}{d\omega} \right\} D\sigma,$$

und dieser Werth, in (4) und (5) substituirt, giebt:

$$D' = -\epsilon\epsilon' \sum \{X_s d\xi + Y_s d\eta + Z_s d\zeta\} D\sigma, \quad (6)$$

$$J' = -\epsilon\epsilon' \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sum \{X_s d\xi + Y_s d\eta + Z_s d\zeta\} D\sigma. \quad (7)$$

Es seien x, y, z , die Coordinaten des Elements Ds . Durch die Accente an den Buchstaben der Coordinaten soll hier und im Folgenden immer angedeutet werden, daß ihre Werthe, unabhängig von der Zeit, allein von dem Bogen des Leiters abhängen, also sich auf einen ruhenden Leiter beziehen, während die nicht accentuirten, z. B. ξ, η, ζ , sich auf einen bewegten Leiter beziehen, und deshalb zugleich Funktionen vom Bogen und von der Zeit sind. Mit $R.DsD\sigma$ bezeichne ich die Wirkung, welche die Einheit des Stroms in Ds auf das Element $D\sigma$ des Inducenten ausübt. Nach dem Ampereschen Gesetz hat R folgenden Werth:

$$(8) \quad R = \frac{j}{r^2} \left\{ r \frac{D^2 r}{Ds D\sigma} - \frac{1}{2} \frac{Dr}{Ds} \cdot \frac{Dr}{D\sigma} \right\},$$

wo j die Stromstärke im Leiter σ und r die Entfernung der Elemente Ds und $D\sigma$ bezeichnet, so daß:

$$(9) \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Die drei rechtwinkligen Componenten von $R.DsD\sigma$ nenne ich $X.DsD\sigma$, $Y.DsD\sigma$, $Z.DsD\sigma$, wo

$$X = - \frac{x - \xi}{r} R, \quad Y = - \frac{y - \eta}{r} R, \quad Z = - \frac{z - \zeta}{r} R,$$

und es wird demnach

$$X_s = - S \frac{x - \xi}{r} R Ds,$$

$$Y_s = - S \frac{y - \eta}{r} R Ds,$$

$$Z_s = - S \frac{z - \zeta}{r} R Ds.$$

Berücksichtigt man, daß

$$(x - \xi) d\xi + (y - \eta) d\eta + (z - \zeta) d\zeta = - r dr,$$

und also

$$X_s d\xi + Y_s d\eta + Z_s d\zeta = S.R dr Ds,$$

so wird:

$$(10) \quad D' = - \epsilon \epsilon' \sum S.R dr Ds D\sigma,$$

$$(11) \quad J' = - \epsilon \epsilon' \int_{r_0}^{r_1} \sum S.R dr Ds D\sigma.$$

Man muß wohl bemerken, daß in allen diesen Ausdrücken das Differentialzeichen d und das Integralzeichen $\int$ sich immer auf den Weg des bewegten Elements beziehen oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf die Zeit, während sich die Integralzeichen S und Σ auf die Bogen s und σ beziehen und die Differentiation nach diesen Bogen durch D bezeichnet wird. —

Ich nehme an, daß die Form der Leiter unverändert bleibe, alsdann erhalten wir den allgemeinsten Ausdruck für die Abhängigkeit der Coordinaten ξ, η, ζ vom Bogen σ und der Zeit, wenn wir ein neues Coordinaten-System ξ, η, ζ einführen, welches sich mit dem Leiter σ zugleich bewegt. Zwischen diesem Coordinatensystem und dem der ξ, η, ζ finden die Gleichungen statt:

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha + a\xi + b\eta + c\zeta, \\ \eta &= \beta + a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ \zeta &= \gamma + a''\xi + b''\eta + c''\zeta,\end{aligned}\tag{12}$$

wo die neun Größen a, b, c, a' etc. den bekannten Relationen der Coordinaten-Verwandlung genügen müssen, im übrigen aber, so wie auch α, β, γ , gegebene Funktionen der Zeit sind, während ξ, η, ζ nur Funktionen des Bogens σ sind. Man hat also z. B.

$$\begin{aligned}d\xi &= d\alpha + \xi da + \eta db + \zeta dc, \\ D\xi &= aD\xi + bD\eta + cD\zeta.\end{aligned}$$

Substituirt man die Werthe von ξ, η, ζ in den Ausdruck (9) von r^2 , so erhält man

$$\begin{aligned}r^2 &= (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ &- 2\xi(a(x - \alpha) + a'(y - \beta) + a''(z - \gamma)) - 2\eta(b(x - \alpha) + b'(y - \beta) + b''(z - \gamma)) \\ &- 2\zeta(c(x - \alpha) + c'(y - \beta) + c''(z - \gamma)).\end{aligned}$$

Denselben Ausdruck für r^2 würde man erhalten haben, wenn man in $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ statt ξ, η, ζ die von der Zeit unabhängigen Coordinaten ξ, η, ζ gesetzt hätte und statt x, y, z die Werthe

$$\begin{aligned}x &= (x - \alpha)a + (y - \beta)a' + (z - \gamma)a'', \\ y &= (x - \alpha)b + (y - \beta)b' + (z - \gamma)b'', \\ z &= (x - \alpha)c + (y - \beta)c' + (z - \gamma)c'',\end{aligned}\tag{13}$$

welche dieselben sind, die man diesen Größen zu ertheilen gehabt hätte, wenn statt des inducirenden Stromleiters der inducirte mit derselben aber

entgegengesetzten Bewegung fortgeführt worden wäre. Da nun R nach (8) nur von r und seinen Differentialquotienten nach s und σ abhängt, und dr das Differential nach der Zeit ist, so hat $R dr Ds D\sigma$ denselben Werth, man mag die Bewegung dem inducirenden Leiter oder dem inducirten in entgegengesetzter Richtung ertheilen. Hieraus folgt, daß wenn in diesen beiden Fällen die Grenzen der Integration in (10) und (11) dieselben bleiben, die elektromotorische Kraft der Ströme D' und J' in beiden Fällen dieselbe ist, und sie selbst sich umgekehrt wie ihre Leitungswiderstände verhalten. Die Grenzen der Integration sind aber in beiden Fällen dieselben, wenn der bewegte Leiter die ganze Bahn des in ihm fließenden Stroms enthält, d. h. wenn die bewegten Leiter geschlossen sind.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

Wenn zwei geschlossene Leiter gegeben sind, so wird dieselbe elektromotorische Kraft inducirt, welcher von beiden Leitern auch sich bewegt und in welchem von beiden auch der inducirende Strom fließt, nur muß die Bewegung des einen Leiters die der Bewegung des andern entgegengesetzte sein. Die in dem einen oder dem andern Falle inducirten Ströme verhalten sich umgekehrt wie ihre Leitungswiderstände.

Man kann diesen Satz auch auf ungeschlossene Leiter ausdehnen, nur darf die Substitution der Bewegung des einen Leiters statt der entgegengesetzten des andern nicht die Länge des ruhenden und des bewegten verschieden machen. Diefß ist nur dadurch möglich, daß ein Theil der Bahn, welche der Strom des einen Leiters durchläuft, an der Bewegung des andern Leiters Theil nimmt, wodurch der erste Leiter, d. h. so weit er ruht oder bewegt wird, zu einem ungeschlossenen wird. — Beispiele von solcherlei Anordnungen sind mehrere bekannt; unter andern gehört hieher die Anordnung, welche Weber in seinen Versuchen über unipolare Induktion beschreibt. — Bewegt sich aber ein ungeschlossener Leiter, während der übrige Theil der Bahn, in welchem der in dem Leiter fließende Strom strömt, ruht, und bleibt dieser Theil in Ruhe, wenn der Leiter selbst ruht, so kann statt der Bewegung dieses Leiters im Allgemeinen nicht die entgegengesetzte des andern substituirt werden, weil, je nachdem der Leiter ruht oder bewegt wird, die Grenzen der Integration in (10) und (11) verschieden sind. Nur dann ist diese Substitution noch erlaubt, wenn das Stück, welches die

Grenzen dieser Integration erweitert, sei es seiner Richtung oder seiner Entfernung vom Inducenten wegen, überhaupt unwirksam ist, in welchem Falle der ungeschlossene Leiter überall als ein geschlossener angesehen werden kann.

Der vorstehende Satz gilt nicht allein für zwei Leiter, sondern ebenso für zwei Systeme von Leitern.

Die Formeln (6) und (7) müssen sich zufolge dieses Satzes auf die Formeln (5) und (6) des vorigen § reduciren, was auch leicht nachzuweisen ist. Die Formeln (6) und (7) sind nemlich gleichbedeutend mit denen in (10) und (11). Setzen wir in diese den Werth von dr , der aus der Gleichung

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

folgt, nemlich, da hier nur x, y, z von der Zeit abhängen,

$$dr = \frac{x - \xi}{r} dx + \frac{y - \eta}{r} dy + \frac{z - \zeta}{r} dz,$$

so erhalten wir z. B.

$$D' = -\epsilon\epsilon' \sum S Ds D\sigma R \left\{ \frac{x - \xi}{r} dx + \frac{y - \eta}{r} dy + \frac{z - \zeta}{r} dz \right\},$$

und bezeichnen wir, wie im vorhergehenden §, die Componenten der Wirkung des ganzen inducirenden Stroms σ auf das Element Ds durch $X_\sigma \cdot Ds$, $Y_\sigma \cdot Ds$, $Z_\sigma \cdot Ds$, so daß

$$X_\sigma = \sum D\sigma R \frac{x - \xi}{r},$$

$$Y_\sigma = \sum D\sigma R \frac{y - \eta}{r},$$

$$Z_\sigma = \sum D\sigma R \frac{z - \zeta}{r},$$

so wird

$$D' = -\epsilon\epsilon' S \cdot Ds \{X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz\},$$

und also

$$J' = -\epsilon\epsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \cdot Ds \{X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz\},$$

welches die Formeln (5) und (6) des vorigen § sind.

§. 5.

Die im Vorigen angestellten Betrachtungen verstatten eine Anwendung auf die durch einen magnetischen Pol hervorgebrachte Induktion, da man

diesen nach der Ampèreschen Theorie als das eine Ende eines Solenoids ansehen kann, dessen anderes Ende im Unendlichen liegt. Die Betrachtung der durch einen magnetischen Pol erregten Induktion giebt die Principien für die Untersuchung der durch einen Magneten inducirten Ströme und derjenigen, welche durch das Auftreten und Verschwinden des Magnetismus erregt werden, so wie sie auch auf die durch geschlossene galvanische Ströme inducirten Ströme eine Anwendung findet, da geschlossene galvanische Ströme nach einem Ampèreschen Satze immer in ihrer Wirkung auf einander als ein System magnetischer Pole angesehen werden können.

Wenn ein Solenoid gegen einen ruhenden Leiter bewegt wird, so hat man zur Bestimmung des Differential- oder Integral-Stroms die Formeln des vorigen § anzuwenden, z. B. (2) oder (3), und also eine Integration nach dem Element $D\sigma$ des Stromes, welcher das Solenoid bildet, auszuführen, nachdem dies Element mit $v\Gamma$ multiplicirt ist. Man kann aber für die Bewegung des Solenoids immer die entgegengesetzte des inducirten Leiters substituiren. Ist dieser Leiter nemlich ein geschlossener, so ergiebt sich dies unmittelbar aus dem Satz des vorigen §; ist er aber ein ungeschlossener, so erfüllt er doch die Bedingungen, unter welchen jener Satz auch auf ungeschlossene Leiter ausgedehnt werden darf. Denn da der inducirte Strom immer eine geschlossene Bahn haben muß, kann der ruhende inducirte Leiter nur dadurch zu einem ungeschlossenen gemacht worden sein, daß ein Theil der Bahn des inducirten Stromes mit dem Solenoid zugleich bewegt wird, mit diesem also fest verbunden ist, und daher in Ruhe bleibt, wenn statt des Solenoids der inducirte Leiter entgegengesetzt bewegt wird. — Umgekehrt kann nicht immer, wenn der inducirte Leiter eine Bewegung hat, dafür die entgegengesetzte des Solenoids substituirt werden; nur dann ist diese Substitution zulässig, wenn der bewegte Leiter ein geschlossener ist, oder der an seinem Schluß fehlende Theil mit dem Solenoid fest verbunden ist, so daß er mit diesem zugleich in Bewegung gesetzt wird. Die Substitution der entgegengesetzten Bewegung des Solenoids statt der Bewegung des inducirten Leiters, wo sie zulässig ist, scheint für die Rechnung zunächst noch keinen Vortheil zu gewähren, weil sie die Berücksichtigung aller Elemente des Solenoid-Stroms erforderlich macht. Ich werde jetzt aber nachweisen, daß der Induktionsstrom von der Bewegung der Elemente des Solenoid-Stroms unabhängig ist und, wenn der inducirte Leiter geschlossen ist,

allein von der Bewegung der Solenoid-Pole abhängt. Ist der Leiter nicht geschlossen, so ist zu dem Ausdruck für den durch die Bewegung der Pole inducirten Strom noch ein Glied hinzuzufügen, das allein von der Bewegung der Endpunkte des Leiters um die ruhenden Solenoidpole abhängt, sei es daß der Leiter sich wirklich bewegt oder daß seine Bewegung statt der der Solenoidpole substituirt gedacht wird.

Ich untersuche zuerst den Fall, wo ein Leiter sich unter dem Einfluß eines Solenoids bewegt; dies ist der allgemeinere Fall, da auf ihn sich immer, wie wir gesehen haben, der Fall, wo ein Solenoid in Bezug auf einen ruhenden Leiter bewegt wird, zurückführen läßt. Ich werde die Untersuchung nur für ein Solenoid durchführen, von welchem das eine Ende im Unendlichen liegt. Aus den Formeln für ein solches Solenoid ergeben sich die für ein begrenztes Solenoid von selbst.

Ich bezeichne, wie oben, die Coordinaten des Elements Ds des bewegten Leiters durch x, y, z und die Projektionen von Ds auf diese Coordinaten durch Dx, Dy, Dz . Den Weg, auf welchem Ds bewegt wird, bezeichne ich wieder durch ω , sein Element durch $d\omega$ und die Projektionen von $d\omega$ auf die Coordinaten x, y, z durch dx, dy, dz . Der Pol des Solenoids habe die Coordinaten ξ, η, ζ . Ich werde der Kürze wegen im Folgenden nur von dem Integral-Strom sprechen, aus welchem man, wenn er unbestimmt bleibt, d. h. sich nicht auf eine geschlossene Bahn bezieht, durch eine Differentiation nach der Bahn ω den Differentialstrom ableitet. Der durch die Bewegung eines Leiters unter dem Einfluß eines Solenoids inducirte Integral-Strom ist nach (6) §. 3:

$$J = - \epsilon \epsilon' \int_{\omega_0}^{\omega_1} S. Ds \{ X_{\epsilon} dx + Y_{\epsilon} dy + Z_{\epsilon} dz \}, \quad (1)$$

wo $X_{\epsilon} Ds, Y_{\epsilon} Ds, Z_{\epsilon} Ds$ die mit x, y, z parallelen Componenten der Wirkung des ganzen Solenoids auf das Element Ds sind, dieses von der Strom-Einheit durchströmt gedacht. Nach den Ampereschen Formeln ist, wenn der eine Pol des Solenoids, wie wir voraussetzen, im Unendlichen liegt,

$$\begin{aligned} X_{\epsilon} Ds &= \frac{\kappa'}{r^3} \{ (z - \zeta) Dy - (y - \eta) Dz \}, \\ Y_{\epsilon} Ds &= \frac{\kappa'}{r^3} \{ (x - \xi) Dz - (z - \zeta) Dx \}, \\ Z_{\epsilon} Ds &= \frac{\kappa'}{r^3} \{ (y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy \}, \end{aligned} \quad (2)$$

wo

$$(3) \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

und der constante Faktor $\kappa' = \frac{1}{2} \alpha \lambda j$ ist, wenn j die Stärke des Solenoid-Stroms bezeichnet, λ den Querschnitt des Solenoids und α die Anzahl der Umgänge, in welchen der Strom die Einheit der Länge umkreist. Wird der Solenoidpol als magnetischer betrachtet, so bezeichnet κ' die Quantität seines freien Magnetismus. Aus diesen Formeln leitet man bekanntlich diejenigen für ein begrenztes Solenoid ab, indem man die entsprechenden Ausdrücke für den zweiten Pol bildet und sie von den vorstehenden abzieht.

Die allgemeinste Form der Abhängigkeit der Coordinaten x, y, z von dem Bogen s und von der Zeit erhält man, wenn ein Coordinaten-System x, y, z , eingeführt wird, welches sich mit dem Leiter zugleich bewegt. Es sei also:

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= a + a'x + b'y + c'z, \\ y &= \beta + a''x + b''y + c''z, \\ z &= \gamma + a'''x + b'''y + c'''z, \end{aligned}$$

wo a, β, γ beliebige Funktionen der Zeit sind, zwischen den neun Coëfficienten $a, b, c, a', etc.$ aber, welche gleichfalls unabhängig von s nur Funktionen der Zeit sind, die bekannten sechs Relationen stattfinden. Die Werthe von x, y, z , dagegen sind von der Zeit unabhängig und nur Funktionen des Bogens s . Die von der Zeit unabhängigen Coordinaten unterscheide ich immer, wie oben schon bemerkt wurde, durch beigesetzte Akzente. Es ist demnach:

$$(5) \quad \begin{aligned} dx &= da + x'da + y'db + z'dc, \\ dy &= d\beta + x'da'' + y'db'' + z'dc'', \\ dz &= d\gamma + x'da''' + y'db''' + z'dc''', \end{aligned}$$

und

$$(6) \quad \begin{aligned} Dx &= aDx + bDy + cDz, \\ Dy &= a'Dx + b'Dy + c'Dz, \\ Dz &= a''Dx + b''Dy + c''Dz. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus (5) die Coordinaten x, y, z mittelst der Gleichungen (4) und führt die Gröfsen dL, dM, dN mit folgender Bedeutung ein:

$$\begin{aligned} dL &= a, da, + b, db, + c, dc, = - (a, da, + b, db, + c, dc,), \\ dM &= a, da + b, db + c, dc = - (a da, + b db, + c dc,), \quad (7) \\ dN &= a da, + b db, + c dc, = - (a, da + b, db + c, dc), \end{aligned}$$

so erhält z. B. dx die Form $dx = da + (z - \gamma) dM - (y - \beta) dN$, welche ich auf die Form $dx = d\lambda + (z - \zeta,) dM - (y - \eta,) dN$ bringe, wo die Gröfsen $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} d\lambda &= da + (\zeta, - \gamma) dM - (\eta, - \beta) dN, \\ d\mu &= d\beta + (\xi, - \alpha) dN - (\zeta, - \gamma) dL, \quad (8) \\ d\nu &= d\gamma + (\eta, - \beta) dL - (\xi, - \alpha) dM. \end{aligned}$$

Die Werthe von dx , dy , dz werden hiernach:

$$\begin{aligned} dx &= d\lambda + (z - \zeta,) dM - (y - \eta,) dN, \\ dy &= d\mu + (x - \xi,) dN - (z - \zeta,) dL, \quad (9) \\ dz &= d\nu + (y - \eta,) dL - (x - \xi,) dM. \end{aligned}$$

Die durch (7) und (8) eingeführten Gröfsen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Nämlich dL , dM , dN sind die während des Zeitelements um die Axen x , y , z beschriebenen Drehungswinkel des Leiters und $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ die mit den Coordinaten x , y , z parallelen Verrückungen, welche der Pol des Solenoids beschreiben würde, wenn er sich mit dem Leiter zugleich bewege. Die Gleichungen (9) setzen also die momentanen Verrückungen eines jeden Elements des bewegten Leiters aus denjenigen zusammen, welche der Pol, wenn er mit ihm verbunden wäre, erleiden würde, und aus denjenigen, welche durch die Drehungen des Leiters um den Pol entstehn.

Durch die Substitution der Werthe von dx , dy , dz aus (9) in die Gleichung (1) zerfällt der Ausdruck von J von selber in zwei Theile, von denen der erste allein von den Componenten der fortschreitenden Bewegung $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, der andere von den Componenten der Drehung dL , dM , dN abhängt. Ich bezeichne den ersten Theil durch J_p , den zweiten durch J_d . Hat der Leiter nur eine fortschreitende Bewegung, so dafs er immer mit sich parallel bleibt, so ist $J_d = 0$, und hat er nur eine um den ruhenden Solenoidpol stattfindende drehende Bewegung, so ist $J_p = 0$. Allgemein ist

$$(10) \quad J_p = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \cdot Ds \{X_\sigma d\lambda + Y_\sigma d\mu + Z_\sigma dv\},$$

$$(11) \quad J_d = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \cdot Ds \left\{ \begin{array}{l} X_\sigma \{(z - \zeta_\sigma) dM - (y - \eta_\sigma) dN\} \\ + Y_\sigma \{(x - \xi_\sigma) dN - (z - \zeta_\sigma) dL\} \\ + Z_\sigma \{(y - \eta_\sigma) dL - (x - \xi_\sigma) dM\} \end{array} \right\}$$

und

$$J = J_p + J_d.$$

Ich werde zuerst den Ausdruck von J_p weiter entwickeln. Ich substituire darin die Ausdrücke von X_σ , Y_σ , Z_σ aus (2) und setze für Dx , Dy , Dz ihre Werthe aus (6); ich ordne das Resultat nach Dx , Dy , und Dz , und gebe ihm die Form:

$$(12) \quad J_p = -\varepsilon\varepsilon' \int S \cdot (A \cdot Dx + B \cdot Dy + C \cdot Dz),$$

wo

$$(13) \quad A = \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} \{(z - \zeta_\sigma) a_\sigma - (y - \eta_\sigma) a_{\sigma\sigma}\} d\lambda \\ + \{(x - \xi_\sigma) a_{\sigma\sigma} - (z - \zeta_\sigma) a_\sigma\} d\mu \\ + \{(y - \eta_\sigma) a_\sigma - (x - \xi_\sigma) a_{\sigma\sigma}\} dv \end{array} \right\},$$

woraus man B und C durch Vertauschung von a , a_σ , $a_{\sigma\sigma}$ resp. mit b , b_σ , $b_{\sigma\sigma}$ und c , c_σ , $c_{\sigma\sigma}$ erhält. Es sind nun hierin die Werthe von x , y , z aus (4) zu setzen. Dadurch wird zunächst $r^2 = (x - \xi_\sigma)^2 + (y - \eta_\sigma)^2 + (z - \zeta_\sigma)^2$ in

$$(14) \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

verwandelt, wo ξ , η , ζ die Bedeutung haben:

$$(15) \quad \begin{aligned} \xi &= a(\xi_\sigma - a_\sigma) + a_\sigma(\eta_\sigma - \beta_\sigma) + a_{\sigma\sigma}(\zeta_\sigma - \gamma_\sigma), \\ \eta &= b(\xi_\sigma - a_\sigma) + b_\sigma(\eta_\sigma - \beta_\sigma) + b_{\sigma\sigma}(\zeta_\sigma - \gamma_\sigma), \\ \zeta &= c(\xi_\sigma - a_\sigma) + c_\sigma(\eta_\sigma - \beta_\sigma) + c_{\sigma\sigma}(\zeta_\sigma - \gamma_\sigma). \end{aligned}$$

Der Faktor von $\frac{1}{r^3}$ in (13) erhält folgenden Werth:

$$(16) \quad \begin{aligned} &\{(y - \zeta_\sigma) a_\sigma - (\beta_\sigma - \eta_\sigma) a_{\sigma\sigma} + y_\sigma(a_\sigma b_{\sigma\sigma} - a_{\sigma\sigma} b_\sigma) - z_\sigma(a_{\sigma\sigma} c_\sigma - a_\sigma c_{\sigma\sigma})\} d\lambda, \\ &+ \{(a - \xi_\sigma) a_{\sigma\sigma} - (y - \zeta_\sigma) a_\sigma + y_\sigma(a_{\sigma\sigma} b_\sigma - a b_{\sigma\sigma}) - z_\sigma(a c_{\sigma\sigma} - a_{\sigma\sigma} c)\} d\mu, \\ &+ \{(\beta_\sigma - \eta_\sigma) a_\sigma - (a - \xi_\sigma) a_{\sigma\sigma} + y_\sigma(a b_\sigma - a_\sigma b) - z_\sigma(a_\sigma c - a c_\sigma)\} dv. \end{aligned}$$

Aus den zwischen den neun Gröfsen a , b , c , a_σ , etc. stattfindenden Relationen folgt:

$$\begin{aligned}
 a, b, - a, b, &= c, & a, c, - a, c, &= b, & b, c, - b, c, &= a, \\
 a, b, - a b, &= c, & a c, - a, c, &= b, & b, c, - b c, &= a, \\
 a b, - a, b &= c, & a, c - a c, &= b, & b c, - b, c &= a.
 \end{aligned} \quad (17)$$

In den allgemeinen Transformationsformeln der Coordinaten können die Gröfsen rechts auch mit dem Minuszeichen behaftet werden; wenn aber das eine System durch Bewegung des andern erhalten wird, gelten nur die Formeln (17). Diese verwandeln den Ausdruck (16) in folgenden,

$$\begin{aligned}
 &\{(\gamma - \zeta) a, - (\beta - \eta) a, + \gamma, c - z, b\} d\lambda \\
 &+ \{(a - \xi) a, - (\gamma - \zeta) a + \gamma, c, - z, b\} d\mu \\
 &+ \{(\beta - \eta) a - (a - \xi) a, + \gamma, c, - z, b\} dv,
 \end{aligned}$$

und eliminirt man hieraus $a - \xi, \beta - \eta, \gamma - \zeta$ mittelst der Gleichungen (15) mit Benutzung von (17), so erhält man dafür:

$$\begin{aligned}
 &\{c(\gamma, - \eta) - b(z, - \zeta)\} d\lambda + \{c, (\gamma, - \eta) - b, (z, - \zeta)\} d\mu \\
 &+ \{c, (\gamma, - \eta) - b, (z, - \zeta)\} dv.
 \end{aligned}$$

Ich setze

$$\begin{aligned}
 ad\lambda + a, d\mu + a, dv &= dl, \\
 bd\lambda + b, d\mu + b, dv &= dm, \\
 cd\lambda + c, d\mu + c, dv &= dn,
 \end{aligned} \quad (18)$$

wodurch der vorstehende Ausdruck sich in den folgenden einfachen Ausdruck verwandelt,

$$A = \frac{1}{r^3} \{(\gamma, - \eta) dn - (z, - \zeta) dm\}. \quad (20)$$

In gleicher Weise erhält man

$$B = \frac{1}{r^3} \{(z, - \zeta) dl - (x, - \xi) dn\},$$

$$C = \frac{1}{r^3} \{(x, - \xi) dm - (\gamma, - \eta) dl\}, \quad (21)$$

und diese Werthe in (12) gesetzt geben

$$J_p = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{aligned} &\{(z, - \zeta) D\gamma, - (\gamma, - \eta) Dz\} dl \\ &+ \{(x, - \xi) Dz, - (z, - \zeta) Dx\} dm \\ &+ \{(\gamma, - \eta) Dx, - (x, - \xi) D\gamma\} dn \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Nun sind nach (8) $d\lambda, d\mu, dv$ die elementaren Verrückungen, welche der Pol parallel mit x, y, z erführe, wenn er mit dem Leiter s fest verbunden

und mit ihm zugleich bewegt würde. Hieraus folgt, daß dl , dm , dn die Verrückungen bezeichnen, welche der Pol, wenn er gleichzeitig mit dem Leiter bewegt wird, parallel mit den Coordinatenachsen x , y , z , erfährt, oder die Projectionen des Weges, welchen er in einem Zeitelement beschreibt, auf diese Coordinatenachsen. Nach (15) sind ξ , η , ζ die Coordinaten des Pols, parallel mit x , y , z , wenn der Pol nicht in der eben bezeichneten Richtung, sondern in der entgegengesetzten bewegt wird. Also sind dl , dm , dn die negativen Veränderungen, welche ξ , η , ζ erleiden, wenn in ihren Ausdrücken die Zeit um ein Element wächst, oder es ist

$$dl = -d\xi, \quad dm = -d\eta, \quad dn = -d\zeta.$$

Diese Gleichungen lassen sich übrigens auch direkt aus den Gleichungen (15) und (8) ableiten. Demnach verwandelt sich der vorstehende Ausdruck von J_p in folgenden:

$$(19) \quad J_p = -\epsilon\epsilon'\kappa' \int_{w_0}^{w_1} S \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{aligned} &\{ (y, -\eta)Dz, - (z, -\zeta)Dy \} d\xi \\ &+ \{ (z, -\zeta)Dx, - (x, -\xi)Dz \} d\eta \\ &+ \{ (x, -\xi)Dy, - (y, -\eta)Dx \} d\zeta \end{aligned} \right\}.$$

Bezeichnet man mit X_p , Y_p , Z_p die Componenten der Wirkung des ganzen ruhenden Leiters auf den Solenoidpol, d. h. setzt man

$$(20) \quad \begin{aligned} X_p &= S \frac{1}{r^3} \{ (y, -\eta)Dz, - (z, -\zeta)Dy \}, \\ Y_p &= S \frac{1}{r^3} \{ (z, -\zeta)Dx, - (x, -\xi)Dz \}, \\ Z_p &= S \frac{1}{r^3} \{ (x, -\xi)Dy, - (y, -\eta)Dx \}, \end{aligned}$$

so wird

$$(21) \quad J_p = -\epsilon\epsilon'\kappa' \int_{w_0}^{w_1} \{ X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta \},$$

und der dem Strome J_p angehörige Differentialstrom, welchen ich durch D_p bezeichne, ist

$$(22) \quad D_p = -\epsilon\epsilon'\kappa' \{ X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta \}.$$

Aus der ganzen vorstehenden Untersuchung ergibt sich nun Folgendes. Die Bewegung eines Leiters unter dem Einfluß eines Solenoidpols kann zusammengesetzt gedacht werden: 1) aus einer allen seinen Elementen gemein-

schaftlichen Bewegung und zwar derjenigen, welche der Pol haben würde, wenn er sich mit dem Leiter zugleich und mit ihm fest verbunden bewegte; 2) aus einer um den ruhenden Pol stattfindenden Drehung. Der Theil des ganzen Induktionsstroms, welcher durch den ersten Theil der Bewegung des Leiters hervorgerufen wird, wo derselbe nur parallel mit sich selbst fortschreitet, ist derselbe, der erregt wird, wenn der Leiter ruht und der Pol sich in entgegengesetzter Richtung bewegt, ferner die elektromotorische Kraft des erregten Differentialstroms gleichgesetzt wird der Geschwindigkeit des Pols, multiplicirt mit der negativen in der Richtung der Bewegung des Pols gemessenen Wirkung des Leiters auf den Pol, die Stromstärke im ruhenden Leiter $= \varepsilon$ gesetzt.

Man darf jedoch aus diesem Satze für sich noch nicht schliessen, daß die Substitution der Bewegung des Pols statt der parallel fortschreitenden Bewegung des Leiters *experimentell* zulässig ist, wiewohl sich dies unter einer einschränkenden Bedingung sofort aus dem folgenden § ergeben wird.

Was nun den zweiten Theil der ganzen Induktion des unter dem Einfluß eines Pols bewegten Leiters betrifft, der aus seiner drehenden Bewegung entsteht, und dessen Integralwerth wir mit J_d bezeichnet haben, dessen Differentialwerth also mit D_d zu bezeichnen ist, so nimmt sein Ausdruck in (11), wenn er nach dL , dM , dN geordnet wird, die Form an:

$$J_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa' \int S \cdot Ds \left\{ \begin{aligned} &+ \{Z_\sigma(y - \eta) - Y_\sigma(z - \zeta)\} dL \\ &+ \{X_\sigma(z - \zeta) - Z_\sigma(x - \xi)\} dM \\ &+ \{Y_\sigma(x - \xi) - X_\sigma(y - \eta)\} dN \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Betrachten wir zuerst den von dL abhängigen Theil

$$-\varepsilon\varepsilon'\kappa' \int S \{Z_\sigma(y - \eta) - Y_\sigma(z - \zeta)\} dL Ds,$$

und setzen darin die Werthe von Z_σ und Y_σ aus (2), so wird derselbe:

$$-\varepsilon\varepsilon'\kappa' \int S \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{aligned} &((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2) Dx \\ &- (x - \xi) ((x - \xi) Dx + (y - \eta) Dy + (z - \zeta) Dz) \end{aligned} \right\} dL.$$

Die in dL multiplicirte Gröfse unter dem Integralzeichen S , welches sich auf den Bogen s bezieht, ist das vollständige Differential von $\frac{x - \xi}{r}$ nach dem

Bogen s . Bezeichnet man die Differenz der Werthe, welche $\frac{x-\xi}{r}$ für die Endpunkte des Bogens s annimmt, durch $\left[\frac{x-\xi}{r}\right]$, so verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in

$$-\varepsilon\varepsilon'\kappa'\int\left[\frac{x-\xi}{r}\right]dL.$$

Bedient man sich immer derselben Klammern zur Bezeichnung der Differenz der auf die Endpunkte des Bogens sich beziehenden Werthe, und braucht für die von dM und dN abhängigen Glieder in (23) eine ähnliche Reduktion, so erhält man

$$(24) \quad J_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa'\int\left[\frac{x-\xi}{r}dL + \frac{y-\eta}{r}dM + \frac{z-\zeta}{r}dN\right],$$

und also

$$(25) \quad D_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa'\left[\frac{x-\xi}{r}dL + \frac{y-\eta}{r}dM + \frac{z-\zeta}{r}dN\right].$$

Wenn der Bogen des Leiters s geschlossen ist, so verschwindet der in die Klammern eingeschlossene Ausdruck, weil die Endpunkte des Bogens s zusammenfallen, und es wird demnach $D_d = 0$. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

I. Wenn der Leiter, welcher unter dem Einfluß eines Solenoidpols bewegt wird, eine geschlossene Curve bildet, so verschwindet der von seiner Drehung herrührende Antheil des inducirten Stroms, und es wird dann derselbe Strom inducirt, als hätte der Leiter nur eine fortschreitende Bewegung, in welcher er parallel mit sich selbst bleibt; und zwar diejenige, welche der Pol haben würde, wenn er sich zugleich mit dem Leiter und mit ihm fest verbunden bewegte.

Diese fortschreitende Bewegung verschwindet, wenn der Leiter nur eine drehende Bewegung, und zwar um eine durch den Pol selbst gehende Axe hat. Hieraus ergibt sich:

II. In einem geschlossenen Leiter, der sich um eine Axe dreht, in welcher der Pol eines Solenoids liegt, wird durch diesen Pol kein Strom inducirt. Dasselbe gilt, wenn in der Drehungsaxe mehrere Pole liegen. Daraus folgt:

III. In einem geschlossenen Leiter, der sich um die Axe eines begrenzten Solenoids dreht, wird durch das Solenoid kein Strom inducirt.

IV. In einem ungeschlossenen Leiter, der sich unter dem Einfluß eines Solenoidpols bewegt, rührt ein Theil des inducirten Stroms von der drehenden Bewegung des Leiters her; dieser Theil ist aber von der Gestalt des Leiters unabhängig, und allein durch die Bewegung seiner Endpunkte bestimmt.

Bezeichnet man mit $d\psi$ das Element des Drehungswinkels, welches während eines Zeitelements beschrieben wird, so daß $d\psi = \sqrt{dL^2 + dM^2 + dN^2}$, und nennt l, m, n die Winkel, welche die Drehungsaxe mit den Coordinaten x, y, z bildet, so daß $dL = \cos l d\psi$, $dM = \cos m d\psi$, $dN = \cos n d\psi$, so verwandelt sich die Formel (25) in die folgende,

$$D_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa' \left[\cos l \frac{x - \xi}{r} + \cos m \frac{y - \eta}{r} + \cos n \frac{z - \zeta}{r} \right] d\psi. \quad (26)$$

Der Differentialstrom ist also gleich dem Produkte aus $-\varepsilon\varepsilon'\kappa'$ und dem Elemente $d\psi$ des Drehungswinkels, multiplicirt mit der Differenz der Cosinusse der Winkel, welche die Drehungsaxe mit den beiden von dem ruhenden Pole nach den bewegten Endpunkten des Bogens s gezogenen Linien bildet.

Man kann die Ausdrücke in (24), (25) und (26) auch noch dadurch transformiren, daß der Leiter mit seinen Endpunkten ruhend und der Pol bewegt gedacht wird. Zu dem Ende nenne man dL, dM, dN , die elementaren Drehungswinkel um die Axen der Coordinaten x, y, z , so daß

$$dL = a dL_1 + b dM_1 + c dN_1,$$

$$dM = a_1 dL_1 + b_1 dM_1 + c_1 dN_1,$$

$$dN = a_2 dL_1 + b_2 dM_1 + c_2 dN_1.$$

Setzt man diese Werthe in (24) und zugleich statt x, y, z ihre Werthe aus (4), und drückt die Größen ξ, η, ζ mittelst (15) durch ξ, η, ζ aus, so ergibt sich

$$D_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa' \left[\frac{x - \xi}{r} dL_1 + \frac{y - \eta}{r} dM_1 + \frac{z - \zeta}{r} dN_1 \right], \quad (27)$$

$$J_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa' \int \left[\frac{x - \xi}{r} dL_1 + \frac{y - \eta}{r} dM_1 + \frac{z - \zeta}{r} dN_1 \right], \quad (28)$$

oder wenn $dL = \cos l' d\psi$, $dM = \cos m' d\psi$, $dN = \cos n' d\psi$ substituirt wird,

$$(29) \quad D_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa' \left[\cos l' \frac{x - \xi}{r} + \cos m' \frac{y - \eta}{r} + \cos n' \frac{z - \zeta}{r} \right] d\psi.$$

Der Differentialstrom D_d ist also gleich dem Produkte aus $-\epsilon\epsilon' n' d\psi$ und der Differenz der Cosinusse der Winkel, welche die Drehungsaxe mit den beiden Linien bildet, welche von den Endpunkten des Leiters nach dem Pol gezogen werden, wenn man den Leiter mit seinen Endpunkten ruhen läßt und dem Pole die entgegengesetzte Bewegung von derjenigen giebt, welche er bei einer festen Verbindung mit dem bewegten Leiter gehabt haben würde.

§. 6.

Im vorigen § wurden die allgemeinen Formeln für die Werthe des Induktionsstroms entwickelt, welcher erregt wird, wenn ein Leiter sich unter dem Einfluß eines Pols bewegt. Die Nachweisung, daß statt der Bewegung des Leiters immer die entgegengesetzte des Pols substituirt werden und er selbst als ruhend angesehen werden kann, hat zunächst nur eine analytische Bedeutung, d. h. sie gewährt zunächst nur den Rechnungsvortheil, daß der von der Bewegung der einzelnen Elemente des Leiters abhängige Werth des Induktionsstroms dadurch von der bloßen Bewegung eines Punktes abhängig gemacht wird. Aber es läßt sich leicht nachweisen, daß die Substitution der entgegengesetzten Bewegung des Pols statt der Bewegung des Leiters auch experimentell zulässig ist.

Wenn nämlich ein Solenoidstrom sich gegen einen ruhenden Leiter bewegt, so wird nach § 4 derselbe Strom inducirt, wie wenn der Solenoidstrom ruht und dem Leiter die entgegengesetzte Bewegung ertheilt wird. Es kann also die entgegengesetzte Bewegung des Leiters statt der Bewegung des Solenoids experimentell substituirt werden. Nach der Bemerkung im Eingange des § 5 ist diese Substitution zulässig, der Leiter mag eine geschlossene Curve bilden oder nicht. Nun kann die substituirte Bewegung des Leiters in dem Fall, daß der eine Pol des Solenoids im Unendlichen liegt, analytisch wieder durch die ihr entgegengesetzte Bewegung, welche man dem im Endlichen liegenden Pol des Solenoids ertheilt, ersetzt werden. Diese Bewegung des Pols ist aber dieselbe, die er ursprünglich wirklich besaß. Hieraus geht dreierlei hervor:

- 1) daß die Induktion, welche durch ein bewegtes Solenoid hervorgerufen wird, allein von der Bewegung seiner Pole abhängt;
- 2) daß die analytische Substitution der entgegengesetzten Bewegung des Pols statt der Bewegung des Leiters, zu welcher der vorige § führte,

auch experimentell zulässig ist, wenn die Anordnung getroffen ist, daß dadurch die Länge des inducirten Leiters keine Änderung erleidet.

3) daß die Werthe der durch die Bewegung eines Solenoidpols in einem ruhenden Leiter inducirten Ströme durch die Formeln (21), (22), (27), (28), (29) des vorigen § ausgedrückt sind.

Aus dem zuletzt Bemerkten ergibt sich, daß wenn ein Solenoidpol in Bezug auf einen ruhenden Leiter bewegt wird, in seiner Bewegung, obwohl er nur als ein Punkt betrachtet wird, doch die fortschreitende und die drehende unterschieden werden muß. Die Werthe des ganzen inducirten Stroms sollen, ähnlich wie oben, durch D' und J' , und die Werthe der Theile, die von der fortschreitenden und von der drehenden Bewegung der Pole herrühren, durch D'_p , J'_p und durch D'_d , J'_d bezeichnet werden, so daß $D' = D'_p + D'_d$ und $J' = J'_p + J'_d$. Die mit der Zeit variablen Coordinaten des Pols seien ξ , η , ζ ; er bewege sich auf der Curve ω , deren Element $d\omega$ die Projektionen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ habe. Die mit den Coordinaten parallelen Componenten der Wirkung, welche der ganze ruhende Leiter, durchströmt von der Einheit des Stroms, auf den Pol ausübt, seien X_p , Y_p , Z_p . Dann ist nach (21) und (22) des vorigen §:

$$D'_p = -\varepsilon\varepsilon'\kappa'\{X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta\}, \quad (1)$$

$$J'_p = -\varepsilon\varepsilon'\kappa'\int\{X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta\}. \quad (2)$$

Dies sind die Werthe des durch die fortschreitende Bewegung des Pols inducirten Stroms. Erleidet der Pol nun aber auf seiner Bahn noch eine Drehung um sich selbst, so entsteht ein zweiter Strom, dessen Werthe mit D'_d oder J'_d bezeichnet werden, je nachdem der Differentialstrom oder Integralstrom gemeint ist. Es bilde die Drehungsaxe mit den Coordinaten ξ , η , ζ die Winkel l' , m' , n' und der elementare Drehungswinkel sei $d\psi$, dann ist nach (29) des vorigen §:

$$D'_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa'\left[\cos l' \frac{x' - \xi}{r} + \cos m' \frac{y' - \eta}{r} + \cos n' \frac{z' - \zeta}{r}\right] d\psi, \quad (3)$$

$$J'_d = -\varepsilon\varepsilon'\kappa'\int\left[\cos l' \frac{x' - \xi}{r} + \cos m' \frac{y' - \eta}{r} + \cos n' \frac{z' - \zeta}{r}\right] d\psi, \quad (4)$$

wo durch die eckigen Klammern immer die Differenz je zweier Werthe bezeichnet wird, welche sich auf den Anfangspunkt und Endpunkt des inducirten Leiters beziehen.

Die Ausdrücke D'_a und J'_a sind immer $= 0$, wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet. Hieraus folgt:

Wenn ein Solenoidpol sich gegen einen ruhenden Leiter, welcher eine geschlossene Curve bildet, bewegt, so hängt sein Induktionsstrom allein von seiner fortschreitenden Bewegung ab. Ferner:

Ein Pol, welcher keine fortschreitende Bewegung besitzt, inducirt in einem geschlossenen Leiter keinen Strom. Ferner:

Ein Pol inducirt in einem nicht geschlossenen ruhenden Leiter einen Strom, ohne seinen Ort zu verlassen, allein durch seine Drehung um sich selbst.

In dem letzten Satze liegt der Aufschluß über alle die Induktionserscheinungen, welche durch die Drehung eines Magneten um seine Axe hervorgebracht werden, über diejenigen z. B., denen Weber den Namen unipolare Induktion gegeben hat.

§. 7.

Ich werde jetzt die Resultate der vorhergehenden §§ zur Bestimmung der Induktionsströme, welche durch Magnete erregt werden, anwenden. Dieser Anwendung liegt die Ansicht der Ampèreschen Theorie zum Grunde, daß ein Magnet ein System von unendlich vielen unendlich kleinen Solenoiden ist. In der Terminologie der Theorie des Magnetismus wird ein unendlich kleines Solenoid als magnetisches Atom bezeichnet; beide Ausdrücke betrachte ich als gleich.

Ich bestimme zunächst den Induktionsstrom, welcher durch ein sehr kleines Solenoid in einem Leiter erregt wird, der sich gegen das ruhende Solenoid bewegt. Der Bogen des Leiters ist s , sein Element Ds hat die Coordinaten x, y, z ; es bewegt sich auf der Curve ω , deren Element $d\omega$ die Projektionen dx, dy, dz hat. Die Coordinaten des Pols des Solenoids, welcher, wenn es beweglich wäre, sich nach Süden richten würde, sind ξ, η, ζ , und die Coordinaten des andern Pols: $\xi + \alpha, \eta + \beta, \zeta + \gamma$, wo α, β, γ so kleine Werthe besitzen, daß in der Entwicklung einer Funktion von ξ, η, ζ nach der Taylorschen Reihe ihre höhern Potenzen vernachlässigt werden können. Die Intensität der Pole ξ, η, ζ und $\xi + \alpha, \eta + \beta,$

$\xi, +\gamma$ wird durch κ' und $-\kappa'$ bezeichnet; in der Theorie des Magnetismus heisst κ' und $-\kappa'$ die Quantität des freien nördlichen und südlichen Magnetismus des magnetischen Atoms. Ich werde der Kürze wegen im Folgenden immer nur die Ausdrücke für den Integralstrom angeben, aus welchen sich durch eine Differentiation die des Differentialstroms ergeben.

Nach (1) §. 5 ist der in dem Leiter durch den Pol (ξ, η, ζ) inducirte Integralstrom

$$J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \cdot Ds \{X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz\}, \quad (1)$$

wo $X_\sigma Ds$, $Y_\sigma Ds$, $Z_\sigma Ds$ die mit x , y , z parallelen Componenten der Wirkung bezeichnen, welche der Pol (ξ, η, ζ) auf die Einheit des Stroms in Ds ausübt. Die Werthe dieser Grössen sind in (2) §. 5 angegeben. Setzt man in vorstehendem Ausdruck $\xi, +\alpha$, $\eta, +\beta$, $\zeta, +\gamma$ statt ξ, η, ζ und giebt ihm das entgegengesetzte Vorzeichen, so erhält man den von dem zweiten Pol des Solenoids inducirten Strom. Die Summe beider Ströme, welche ich durch $J^{(a)}$ bezeichne, ist der Induktionsstrom des magnetischen Atoms. Entwickelt man diese Summe nach der Taylorschen Reihe und berücksichtigt nur die ersten Potenzen von α , β , γ , so ergibt sich

$$J^{(a)} = +\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\kappa'} \int_{w_0}^{w_1} S \cdot Ds \left\{ \begin{aligned} &\left(a \frac{dX_\sigma}{d\xi} + b \frac{dX_\sigma}{d\eta} + c \frac{dX_\sigma}{d\zeta} \right) dx \\ &+ \left(a \frac{dY_\sigma}{d\xi} + b \frac{dY_\sigma}{d\eta} + c \frac{dY_\sigma}{d\zeta} \right) dy \\ &+ \left(a \frac{dZ_\sigma}{d\xi} + b \frac{dZ_\sigma}{d\eta} + c \frac{dZ_\sigma}{d\zeta} \right) dz \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

wo $a = \kappa'\alpha$, $b = \kappa'\beta$, $c = \kappa'\gamma$ gesetzt ist, und die partielle Differentiation durch die Charakteristik d bezeichnet wird. Der gemeinschaftliche Divisor κ' vor dem Integralzeichen fällt bei Einführung der Werthe von X_σ , Y_σ , Z_σ , welche den gemeinschaftlichen Faktor κ' haben, fort. Die Grössen a , b , c heissen nach der von Gaußs eingeführten Benennung die magnetischen Momente des Atomes.

Ich beschreibe um ξ, η, ζ einen kleinen Raum Δv , der jedoch viele magnetische Atome enthält, und bezeichne mit $J^{(a)}$ die Summe aller von denselben erregten Induktionsströme. Durch a' , b' , c' bezeichne ich das arithmetische Mittel der Werthe von a , b , c , welche den verschiedenen in

Δv enthaltenen Solenoiden angehören, und mit $n\Delta v$ die Anzahl dieser Solenoide: dann erhält man jene Summe $J^{(e)}$ bis auf Größen zweiter Ordnung, die vernachlässigt werden müssen, wenn man statt a, b, c in (2) a', b', c' setzt und das Glied rechter Hand mit $n\Delta v$ multiplicirt. Ich setze statt na', nb', nc' respective α', β', γ' . Es sind dies die drei magnetischen Momente des in der Raumeinheit befindlichen Magnetismus, wenn in dieser eine gleichförmige Vertheilung von magnetischen Atomen in der nämlichen Dichtigkeit wie in Δv stattfindet, und die magnetischen Momente eines jeden derselben denselben Werth haben als die arithmetischen Mittel der Momente der Atome in Δv . Demnach wird der Induktionsstrom, welcher durch das Element Δv erregt wird:

$$(3) \quad J^{(e)} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\kappa'} \int_{w_0}^{w_1} S \left\{ \begin{aligned} & \left(\alpha' \frac{dX_\sigma}{d\xi} + \beta' \frac{dX_\sigma}{d\eta} + \gamma' \frac{dX_\sigma}{d\zeta} \right) dx \\ & + \left(\alpha' \frac{dY_\sigma}{d\xi} + \beta' \frac{dY_\sigma}{d\eta} + \gamma' \frac{dY_\sigma}{d\zeta} \right) dy \\ & + \left(\alpha' \frac{dZ_\sigma}{d\xi} + \beta' \frac{dZ_\sigma}{d\eta} + \gamma' \frac{dZ_\sigma}{d\zeta} \right) dz \end{aligned} \right\} Ds \Delta v.$$

Die Summation dieses Ausdrucks in Bezug auf Δv , auf den ganzen Magneten ausgedehnt, giebt den ganzen von ihm inducirten Integralstrom, welchen ich mit $J^{(m)}$ bezeichne. Die magnetischen Momente α', β', γ' sind in diesem Ausdrucke als stetige Funktionen der Ordinaten ξ, η, ζ , des Elements Δv zu betrachten, wodurch sich wegen der Kleinheit von Δv die Summe nach Δv in ein dreifaches Integral verwandelt, welches, ausgedehnt auf den ganzen Magneten, durch Σ bezeichnet werden soll. Diese dreifache Integration, werde ich zeigen, kann immer durch eine doppelte nach der Oberfläche des Magneten ersetzt werden.

Ich setze aus (2) §. 5 die Werthe für $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$, und zwar in folgender Form:

$$(4) \quad \begin{cases} X_\sigma Ds = \kappa' \left\{ \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{r} Dy - \frac{d}{d\eta} \frac{1}{r} Dz \right\}, \\ Y_\sigma Ds = \kappa' \left\{ \frac{d}{d\xi} \frac{1}{r} Dz - \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{r} Dx \right\}, \\ Z_\sigma Ds = \kappa' \left\{ \frac{d}{d\eta} \frac{1}{r} Dx - \frac{d}{d\xi} \frac{1}{r} Dy \right\}, \end{cases}$$

wo $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$.

Setzt man der Kürze wegen

$$P = \alpha' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\xi} + \beta' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\eta} + \gamma' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\zeta},$$

so ergibt sich aus (3):

$$J^{(e)} = \varepsilon \varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \left\{ \begin{aligned} & (dy Dz - dz Dy) \frac{dP}{d\xi} \\ & + (dz Dx - dx Dz) \frac{dP}{d\eta} \\ & + (dx Dy - dy Dx) \frac{dP}{d\zeta} \end{aligned} \right\} \Delta v. \quad (5)$$

Ich setze $\Delta v = D\xi, D\eta, D\zeta$, und führe eine Gröfse Q ein, welche durch die Gleichung

$$Q = \Sigma \left\{ \alpha' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\xi} + \beta' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\eta} + \gamma' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\zeta} \right\} D\xi, D\eta, D\zeta, \quad (6)$$

definirt wird. Man erhält dann, wenn man in (5) statt der partiellen Differentialquotienten nach ξ, η, ζ , die negativen nach x, y, z setzt,

$$J^{(m)} = -\varepsilon \varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \left\{ \begin{aligned} & (dy Dz - dz Dy) \frac{dQ}{dx} \\ & + (dz Dx - dx Dz) \frac{dQ}{dy} \\ & + (dx Dy - dy Dx) \frac{dQ}{dz} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Wenn durch $X_m Ds, Y_m Ds, Z_m Ds$ die Componenten der Wirkung bezeichnet werden, welche der ganze Magnet auf die Einheit des Stroms in Ds ausübt, so dafs

$$\left. \begin{aligned} X_m Ds &= \frac{dQ}{dz} Dy - \frac{dQ}{dy} Dz, \\ Y_m Ds &= \frac{dQ}{dx} Dz - \frac{dQ}{dz} Dx, \\ Z_m Ds &= \frac{dQ}{dy} Dx - \frac{dQ}{dx} Dy, \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

so kann man statt (7) schreiben:

$$J^{(m)} = -\varepsilon \varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \cdot Ds \{ X_m dx + Y_m dy + Z_m dz \}. \quad (9)$$

Die Gröfse Q nenne ich das in Bezug auf einen in dem Punkte (x, y, z) befindlichen Pol stattfindende Potential des Magneten, dessen partielle Diffe-

rentialquotienten nach x, y, z die Componenten der Wirkung des Magneten auf diesen Pol sind. Von solchem Potential hat Gauss gezeigt, daß es in Bezug auf einen außerhalb des Magneten liegenden Pol immer durch ein Potential der Oberfläche des Magneten ersetzt werden kann, und daß die entsprechende auf dieser Oberfläche anzunehmende Vertheilung des Magnetismus vollkommen bestimmt und nur auf eine einzige Art möglich ist. Nennen wir κ die Dicke, welche man der magnetischen Oberfläche ertheilen muß, $D\omega$ das Element der Oberfläche, so ist

$$(10) \quad Q = \sum \frac{\kappa D\omega}{r},$$

wo durch $\sum$ die Integration nach der ganzen Oberfläche bezeichnet ist. Be-
findet sich der Magnet im Gleichgewichtszustand zwischen dem in ihm er-
regten Magnetismus und solchen äußern erregenden Kräften, welche sich
durch ein Potential darstellen lassen, so sind die drei magnetischen Mo-
mente α', β', γ' eines in dem Punkte (ξ, η, ζ) befindlichen Elementes nach
Poissons Theorie der magnetischen Vertheilung die nach ξ, η, ζ genom-
menen partiellen Differentialquotienten einer Funktion ϕ dieser Coordinaten,
nämlich $\alpha' = \frac{d\phi}{d\xi}, \beta' = \frac{d\phi}{d\eta}, \gamma' = \frac{d\phi}{d\zeta}$, und diese Funktion genügt der Gleichung

$$(11) \quad \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = 0.$$

In diesem Falle ergibt sich dann durch partielle Integration des Ausdrucks
von Q in (6) mittelst der Gleichung (11), wenn man einige einfache geo-
metrische Betrachtungen zu Hülfe ruft,

$$(12) \quad Q = \sum \frac{d\phi}{dN} \cdot \frac{D\omega}{r},$$

wo die GröÙe $\frac{d\phi}{dN}$, welche ich den für die Oberfläche des Magneten geltenden,
nach ihrer Normale genommenen Differentialquotienten von ϕ nenne, die fol-
gende Bedeutung hat. Nennt man nämlich ϱ, σ, τ die Winkel, welche die
nach Außen gerichtete Normale mit der positiven Richtung der Coordinaten-
achsen bildet, so wird $\frac{d\phi}{dN} = \cos\varrho \frac{d\phi}{d\xi} + \cos\sigma \frac{d\phi}{d\eta} + \cos\tau \frac{d\phi}{d\zeta}$, und $\frac{d\phi}{dN} dN$ gleich dem
Werthe der Funktion ϕ an einem Punkte der Oberfläche weniger ihrem Werthe
in einem Punkte der in ihm errichteten und nach Innen gerichteten Normale der
Oberfläche, welcher von ihr um dN entfernt ist. Ähnlicher Bezeichnungen und
Benennungen werde ich mich auch in der Folge bedienen. Die Vergleichung
mit dem Ausdruck in (10) zeigt, daß in dem angenommenen Falle $\frac{d\phi}{dN} = \kappa$ ist.

Substituirt man den Werth von Q aus (10) in die Gleichungen (8) und (9), so erhält man

$$J^{(m)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma\kappa D\omega \int S \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{aligned} &\{(y-\eta)Dz - (z-\zeta)Dy\}dx \\ &+ \{(z-\zeta)Dx - (x-\xi)Dz\}dy \\ &+ \{(x-\xi)Dy - (y-\eta)Dx\}dz \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Dies ist die einfachste Form, auf die sich im Allgemeinen der Ausdruck für den Induktionsstrom, welcher durch einen ruhenden Magneten in einem bewegten Leiter erregt wird, reduciren läßt. Man erhält denselben Ausdruck, wenn man in der Gleichung (1) § 5 für X , Y , Z ihre Werthe aus (2) desselben § einführt, ferner $-\kappa D\omega$ statt κ' setzt und das Integral über die Oberfläche des Magneten ausdehnt. Die unter dem Zeichen Σ stehende Gröfse, multiplicirt mit $\varepsilon\varepsilon'$, kann also als der Werth des durch das Element $D\omega$ der magnetischen Oberfläche inducirten Stroms angesehen werden, und sie erlaubt ganz dieselbe Transformation, wie der Ausdruck (1) in § 5. Demnach kann der von $D\omega$ inducirte Strom auch so angesehen werden, als wäre er dadurch hervorgebracht, daß man statt des bewegten Leiters das Element $D\omega$ in entgegengesetzter Richtung bewegt. Es zerfällt daher sein Ausdruck in zwei Theile, $J_p^{(m)}$ und $J_d^{(m)}$, von denen der erste allein von dem Wege, auf welchem $D\omega$ fortgeführt wird, der andre von der Drehung abhängt, welche $D\omega$ auf diesem Wege erfährt. Nimmt man also die Buchstaben x , y , z , ξ , η , ζ , λ , μ , ν , $d\psi$ in derselben Bedeutung wie in §. 5, so hat man

$$J^{(m)} = J_p^{(m)} + J_d^{(m)}, \quad (14)$$

$$J_p^{(m)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma\kappa D\omega \int S \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{aligned} &\{(z-\zeta)Dy - (y-\eta)Dz\}d\xi \\ &+ \{(x-\xi)Dz - (z-\zeta)Dx\}d\eta \\ &+ \{(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy\}d\zeta \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

$$J_d^{(m)} = +\varepsilon\varepsilon'\Sigma\kappa D\omega \int d\psi \left[\frac{x-\xi}{r} \cos\lambda + \frac{y-\eta}{r} \cos\mu + \frac{z-\zeta}{r} \cos\nu \right], \quad (16)$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2. \quad (17)$$

Wir haben bis jetzt den Magneten als ruhend und den Leiter als bewegt betrachtet. Der entgegengesetzte Fall, wenn der Leiter ruht und der Magnet bewegt wird, läßt sich leicht hierauf zurückführen. Da der Magnet als ein System von Solenoidströmen angesehen wird, so ist nach §. 4 der

Strom, welcher durch seine Bewegung in dem ruhenden Leiter inducirt wird, derselbe, welcher erregt wird, wenn statt seiner dem Leiter die entgegengesetzte Bewegung ertheilt wird, und nach der im Eingange zu §. 5 gemachten Bemerkung ist dies gültig, der Leiter mag eine geschlossene Curve bilden oder nicht. Hieraus folgt, daß durch die Gleichung (13) der durch die Bewegung des Magneten inducirte Integralstrom dargestellt wird, wofern man nur den Größen x, y, z, dx, dy, dz die Werthe ertheilt, die ihnen zukommen, wenn dem Leiter die der Bewegung des Magneten entgegengesetzte Bewegung gegeben wird, während man diesen selbst als ruhend betrachtet. Der durch (13) gegebene Ausdruck für diesen Integralstrom ist gleichwerthig mit dem durch (14), (15) und (16) gegebenen Ausdruck. In diesen Gleichungen aber haben die Buchstaben $\xi, \eta, \zeta, d\xi$ etc. diejenigen Werthe, welche der im Experiment gegebenen Bewegung des Magneten entsprechen, und welche direkt die durch die Bewegung eines Magneten in einem ruhenden Leiter inducirten Ströme bestimmen.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

I. Wenn einem Leiter nur eine fortschreitende und keine drehende Bewegung gegeben wird, so kann man immer, er mag eine geschlossene Curve bilden oder nicht, wenn nur seine Länge nicht verändert wird, seiner Bewegung die entgegengesetzte des Magneten substituiren, und die elektromotorische Kraft des inducirten Differentialstroms ausdrücken durch die Geschwindigkeit dieser Bewegung, multiplicirt mit der negativen, ihrer Richtung parallelen Componente der Wirkung, die auf den Magneten von dem ruhenden Leiter ausgeübt wird, wenn man letztern von einem Strome mit der Intensität ϵ durchströmt denkt.

Bei der fortschreitenden Bewegung ist nämlich $d\psi = 0$ und dx, dy, dz unabhängig von x, y, z , so wie auch $d\xi, d\eta, d\zeta$ unabhängig von ξ, η, ζ , weshalb diese Projektionen der Elemente der beschriebenen Wege in (13) und (15) außerhalb der Integralzeichen S und Σ gestellt werden können.

II. Wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet, kann statt seiner Bewegung immer die entgegengesetzte Bewegung des Magneten gesetzt, und die elektromotorische Kraft des inducirten Differentialstroms ausgedrückt werden durch die

Summe der Produkte aus der Geschwindigkeit der Elemente der magnetischen Oberfläche in die negative, der Richtung ihrer Bewegung parallele Componente der Wirkung, welche der von dem Strome ϵ durchströmte Leiter auf sie ausübt.

Wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet, verschwindet nämlich in (16) die unter dem Zeichen $\int$ stehende Gröfse.

III. Wenn die Bewegung des Leiters keine parallel fortschreitende ist, und er keine geschlossene Curve bildet, so kann zwar seiner Bewegung die entgegengesetzte des Magneten gleichfalls substituirt werden, vorausgesetzt dafs seine Länge dadurch nicht geändert wird, und die elektromotorische Kraft des Differentialstroms kann ebenso wie im vorigen Satz bestimmt werden; es mufs aber dieser noch eine andere von der Drehung herrührende elektromotorische Kraft hinzugefügt werden, welche von der Lage der Endpunkte des Leiters abhängt und von dessen Gestalt unabhängig ist. Es ist dies diejenige, welche den in (16) angegebenen Strom $J_d^{(m)}$ erzeugt.

IV. Wenn ein Magnet so bewegt wird, dafs er parallel mit sich selbst bleibt, so ist die in einem ruhenden Leiter, er mag geschlossen sein oder nicht, erregte elektromotorische Kraft des Differentialstroms das Produkt aus der Geschwindigkeit in die negative, der Richtung der Bewegung parallele Componente der Wirkung, welche der ruhende von dem Strome ϵ durchströmte Leiter auf den Magneten ausübt.

V. Die durch eine beliebige Bewegung eines Magneten in einem ruhenden Leiter erregte elektromotorische Kraft des Differentialstroms ist, wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet, die Summe der Produkte aus der Geschwindigkeit der Elemente der magnetischen Oberfläche in die negative, der Richtung der Bewegung parallele Componente der Wirkung, welche auf sie der vom Strome ϵ durchströmte Leiter ausübt.

VI. Die durch die Bewegung eines Magneten in einem ruhenden Leiter erregte elektromotorische Kraft des Differentialstroms wird, wenn der Leiter nicht eine geschlossene Curve bildet, wie im vorigen Satze bestimmt; es mufs derselben

aber noch eine zweite, von der Drehung des Magneten herrührende elektromotorische Kraft hinzugefügt werden, welche von der Lage der Endpunkte des Leiters abhängt und von seiner Gestalt unabhängig ist. Es ist dies diejenige, welche den in (16) gegebenen Strom $J_d^{(m)}$ erzeugt.

§. 8.

Ich will jetzt die Ausdrücke für die Induktionsströme angeben, welche durch ein plötzliches Auftreten oder Verschwinden von Magnetismus erregt werden, indem ich im Sinne der bekannten Theorie des Magnetismus den Akt der Magnetisirung oder Entmagnetisirung als eine Bewegung der beiden magnetischen Flüssigkeiten ansehen werde, in Folge deren die vereinigten sich trennen oder die getrennten sich vereinigen. Dieselben Resultate werde ich aber im folgenden § noch auf eine andere Weise aus einem neuen allgemeinen Princip ableiten, welches durch eine Verallgemeinerung der aus den vorhergehenden §§ sich für die Induktion zwischen geschlossenen Strömen und geschlossenen Leitern ergebenden Resultate erhalten wird, und mittelst dessen sich auch diejenigen Induktionsströme bestimmen lassen, welche in einem Leiter durch Schwächung oder Verstärkung der Intensität eines in seiner Nähe fließenden galvanischen Stromes erregt werden.

Ich werde zuerst den Gesichtspunkt verfolgen, zufolge dessen der durch Entmagnetisirung inducirte Strom durch die Bewegung der entgegengesetzten freien magnetischen Flüssigkeiten hervorgebracht wird, wenn dieselbe bis zu ihrer gegenseitigen Durchdringung, d. i. bis zu ihrer Neutralisirung fortgesetzt wird. Ich gehe von der Betrachtung eines magnetischen Atomes aus, auf dessen Oberfläche die freien magnetischen Flüssigkeiten irgendwie vertheilt sind. Die Coordinaten des Mittelpunktes des Atoms nenne ich ξ, η, ζ , die Coordinaten eines Elements $D\omega$ seiner Oberfläche $\xi + \xi, \eta + \eta, \zeta + \zeta$, und die eines beliebigen Punktes im Innern des Atoms $\xi + a, \eta + b, \zeta + c$. Ich nenne $\kappa D\omega$ die Quantität von magnetischer Flüssigkeit, welche sich auf $D\omega$ befindet; κ ist eine Funktion von ξ, η, ζ , und genügt, wenn durch Σ das Integral nach der ganzen Oberfläche des Atoms bezeichnet wird, der Gleichung $\Sigma \kappa D\omega = 0$. Bei der Entmagnetisirung bewegen sich die auf der Oberfläche des Atoms vertheilten Flüssigkeiten ins Innere desselben, und

ein Theil von ihnen neutralisirt sich gegenseitig in dem Punkte (a, b, c) . Ich nenne $\kappa'D\omega$ die Menge, welche das Element $D\omega$ zu den in (a, b, c) sich neutralisirenden Flüssigkeiten hergiebt. Es ist κ' eine Funktion von ξ, η, ζ und genügt gleichfalls der Gleichung $\Sigma \kappa'D\omega = 0$. Die Projektionen des Elements des Weges, auf welchem sich $\kappa'D\omega$ von (ξ, η, ζ) nach (a, b, c) bewegt, nenne ich $\partial\xi, \partial\eta, \partial\zeta$. Der durch die Bewegung von $\kappa'D\omega$ erregte Induktionsstrom kann nur in einem geschlossenen Leiter zu Stande kommen, und daher wird der Integralstrom dieser Bewegung vollständig durch den Strom $J_p^{(m)}$ in (15) des vorhergehenden § dargestellt, den ich jetzt kurzweg mit J bezeichnen will. In diesem Ausdruck (15) kann man wegen der Kleinheit des magnetischen Atoms die Componenten der Wirkung, welche der von der Einheit des Stroms durchströmte Leiter auf $\kappa'D\omega$ ausübt, für jedes Element $D\omega$ und auf dem ganzen Wege, welchen $\kappa'D\omega$ beschreibt, als constant ansehen. Bezeichnet man der Kürze wegen diese Componenten mit $A\kappa'D\omega, B\kappa'D\omega, C\kappa'D\omega$, so daß

$$\begin{aligned} A &= S \frac{1}{r^3} \{ (z, -\zeta) Dy - (y, -\eta) Dz \}, \\ B &= S \frac{1}{r^3} \{ (x, -\xi) Dz - (z, -\zeta) Dx \}, \\ C &= S \frac{1}{r^3} \{ (y, -\eta) Dx - (x, -\xi) Dy \}, \end{aligned} \quad (1)$$

so erhält man

$$J = -\epsilon\epsilon' \Sigma \int \kappa'D\omega \{ A\partial\xi + B\partial\eta + C\partial\zeta \}, \quad (1.a)$$

oder, indem man die Integration in Bezug auf den Weg, welchen $\kappa'D\omega$ durchläuft, ausführt, d. h. das durch $\int$ bezeichnete Integral von (ξ, η, ζ) bis (a, b, c) erstreckt,

$$J = +\epsilon\epsilon' \Sigma \kappa'D\omega \{ A(\xi - a) + B(\eta - b) + C(\zeta - c) \}.$$

Da die Summirung Σ sich nur auf ξ, η, ζ bezieht, und in ihr a, b, c konstant sind, so reducirt sich wegen der Gleichung $\Sigma \kappa'D\omega = 0$ der vorstehende Ausdruck auf

$$J = \epsilon\epsilon' \{ A \Sigma \kappa'\xi D\omega + B \Sigma \kappa'\eta D\omega + C \Sigma \kappa'\zeta D\omega \}. \quad (2)$$

Der Strom J ist also von der Lage des Punktes (a, b, c) unabhängig, und hieraus folgt, wenn mit $\kappa''D\omega, \kappa'''D\omega$ etc. die Quantitäten Flüssigkeiten bezeichnet werden, welche das Element $D\omega$ nach einem zweiten, dritten u. s. w. Punkte zur Neutralisation sendet, und man

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum (\kappa' + \kappa'' + \dots) \xi D\omega, \\ \beta &= \sum (\kappa' + \kappa'' + \dots) \eta D\omega, \\ \gamma &= \sum (\kappa' + \kappa'' + \dots) \zeta D\omega\end{aligned}$$

setzt, der durch die Neutralisation aller auf der Oberfläche des Atoms vertheilten Flüssigkeiten inducirte Strom, den ich durch E bezeichne,

$$(3) \quad E = \varepsilon \varepsilon' (A\alpha + B\beta + C\gamma),$$

wo $\kappa' + \kappa'' + \dots = \kappa$ ist, und daher die Gröfsen α, β, γ die magnetischen Momente des Atoms bedeuten.

Der vorstehende Werth von E ist der Ausdruck des durch die Entmagnetisirung des Atoms inducirten Stroms. Den Strom, welcher durch dessen Magnetisirung erregt wird, den ich durch M bezeichne, erhält man auf dieselbe Weise, nur dafs bei der Integration von (1.a) die Grenzen der Integration umzukehren sind, weil sich jetzt das Flüssigkeitsquantum $\kappa' D\omega$ von dem Punkte (a, b, c) nach dem Punkte (ξ, η, ζ) bewegt. Hierdurch wird in (2) und (3) nur das Vorzeichen geändert, so dafs

$$(4) \quad M = - \varepsilon \varepsilon' (A\alpha + B\beta + C\gamma).$$

Beschreibt man, wie oben, um (ξ, η, ζ) einen kleinen Raum Dv und versteht unter α, β, γ die arithmetischen Mittelwerthe der magnetischen Momente aller in Dv enthaltenen Atome, nennt ihre Anzahl nDv und setzt $n\alpha = \alpha', n\beta = \beta', n\gamma = \gamma'$, so erhält man für den durch die Magnetisirung sämmtlicher in Dv enthaltenen Atome inducirten Strom, den ich mit M' bezeichnen will, den Ausdruck

$$(5) \quad M' = - \varepsilon \varepsilon' (A\alpha' + B\beta' + C\gamma') Dv,$$

wo α', β', γ' in demselben Sinne wie in §. 7 die magnetischen Momente der Einheit des Raumes sind. Betrachtet man Dv als ein Element des Magneten, und nimmt von dem vorstehenden Ausdruck die Summe in Bezug auf alle Dv , so erhält man den durch den Akt seiner Magnetisirung inducirten Strom, den ich durch $J^{(\mu)}$ bezeichnen will,

$$(6) \quad J^{(\mu)} = - \varepsilon \varepsilon' \sum \{A\alpha' + B\beta' + C\gamma'\} Dv.$$

Diese Summe erheischt wegen der Kleinheit von Dv nur eine dreifache Integration, welche über den ganzen Magnet auszudehnen ist.

Da der inducirte Leiter immer eine geschlossene Curve bildet, weil, wenn Magnet und Leiter ruhen, die Induktion nothwendig den ganzen Weg trifft, auf welchem der inducirte Strom sich fortpflanzt, und da nach einem Ampèreschen Satz die Wirkung, welche ein geschlossener Strom auf einen Magnetpol ausübt, sich durch ein Potential darstellen läßt(*), so können A, B, C , welches die drei rechtwinkligen Componenten einer solchen Wirkung sind, als die partiellen Differentialquotienten eines Potentials V in Bezug auf die Coordinaten ξ, η, ζ angesehen werden. Es ist also

$$A = \frac{dV}{d\xi}, \quad B = \frac{dV}{d\eta}, \quad C = \frac{dV}{d\zeta}. \quad (7)$$

Der magnetische Zustand, der hier in Rede steht, ist immer ein Gleichgewichtszustand zwischen dem erregten Magnetismus und solchen erregenden äusseren Kräften, welche sich auch ihrerseits durch ein Potential darstellen lassen. Die erregenden Kräfte rühren nämlich entweder von äusseren Magnetpolen oder geschlossenen galvanischen Strömen her. Deshalb sind α', β', γ' immer die nach ξ, η, ζ genommenen partiellen Differentialquotienten einer Funktion, welche wir im vorigen § schon mit ϕ bezeichnet haben,

$$\alpha' = \frac{d\phi}{d\xi}, \quad \beta' = \frac{d\phi}{d\eta}, \quad \gamma' = \frac{d\phi}{d\zeta}, \quad (8)$$

und diese Funktion ϕ hat die Eigenschaft, dafs

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = 0. \quad (9)$$

Setzt man die Werthe aus (7) und (8) in (6) und zugleich $Dv = D\xi D\eta D\zeta$, so wird

$$J^{(\mu)} = -\epsilon\epsilon'\Sigma \left\{ \frac{dV}{d\xi} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{dV}{d\eta} \cdot \frac{d\phi}{d\eta} + \frac{dV}{d\zeta} \cdot \frac{d\phi}{d\zeta} \right\} D\xi D\eta D\zeta. \quad (10)$$

Die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks integrirte ich partiell, und setze z. B.

$$\Sigma \frac{dV}{d\xi} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} D\xi D\eta D\zeta = \Sigma \left[V \frac{d\phi}{d\xi} \right] D\eta D\zeta - \Sigma V \frac{d^2\phi}{d\xi^2} D\xi D\eta D\zeta,$$

wo durch die Klammer die Differenz der beiden Werthe von $V \frac{d\phi}{d\xi}$ bezeichnet werden soll, welche dieser Ausdruck an den Punkten annimmt, in welchen

(*) Ich drücke mich der Kürze halber auf diese Weise aus, statt zu sagen, dafs die rechtwinkligen Componenten der Wirkung die partiellen Differentialquotienten des Potentials sind.

die Oberfläche des Magneten von einer mit der Ordinate ξ parallelen Linie geschnitten wird. Reducirt man auf ähnliche Art die beiden andern Terme, wobei man der Einfachheit wegen voraussetzt, daß jede gerade Linie die Oberfläche nur zweimal schneidet, so erhält man

$$J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma \left[V \frac{d\phi}{d\xi} D\eta D\zeta + V \frac{d\phi}{d\eta} D\xi D\zeta + V \frac{d\phi}{d\zeta} D\xi D\eta \right] \\ + \varepsilon\varepsilon'\Sigma V \left\{ \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \right\} D\xi D\eta D\zeta.$$

Das zweite Glied verschwindet wegen (9), und die Integration in dem ersten Gliede bezieht sich nur noch auf die Oberfläche. Wenn durch $D\omega$ das Element der Oberfläche bezeichnet wird, durch (N, ξ) , (N, η) , (N, ζ) die Winkel, welche die Normale an diesem Element respective mit den Coordinaten ξ , η , ζ bildet, so wird $D\eta D\zeta = D\omega \cos(N, \xi)$ etc., und es nimmt daher der vorstehende Ausdruck die Form an,

$$(11) \quad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma V \left\{ \cos(N, \xi) \frac{d\phi}{d\xi} + \cos(N, \eta) \frac{d\phi}{d\eta} + \cos(N, \zeta) \frac{d\phi}{d\zeta} \right\} D\omega.$$

Die in der Parenthese eingeschlossene Gröfse will ich das Differential von ϕ nach der Normale der Oberfläche des Magneten nennen und mit $\frac{d\phi}{dN}$ bezeichnen; es wird demnach

$$(12) \quad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma V \frac{d\phi}{dN} D\omega.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für $J^{(\mu)}$ aus (10), weil auch V als ein Potential der Gleichung

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{d^2 V}{d\zeta^2} = 0$$

genügt, den Ausdruck

$$(13) \quad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma \phi \frac{dV}{dN} D\omega.$$

Die Integrationen in (12) und (13) sind auf die ganze Oberfläche des Magneten auszudehnen, und für ϕ , V , $\frac{d\phi}{dN}$, $\frac{dV}{dN}$ die an der Oberfläche in dem Element $D\omega$ geltenden Werthe dieser Gröfsen zu setzen.

Die Gleichungen (12) und (13) haben die einfachste Form, auf welche sich der Ausdruck für den durch den Akt der Magnetisirung inducirten Strom im Allgemeinen reduciren läßt. Kehrt man in den Gliedern rechter Hand die Vorzeichen um, so drücken sie den durch den Akt der Entmagnetisirung inducirten Strom aus.

Es ist bis jetzt angenommen worden, daß die Erregung des magnetischen Zustandes vom neutralen Zustande aus stattfindet, und ebenso, daß die Aufhebung desselben vollständig sei. Wenn die Magnetisirung oder Entmagnetisirung nur in einer Veränderung des magnetischen Zustandes besteht, sind in den vorstehenden Ausdrücken des inducirten Stroms $J^{(\mu)}$ unter ϕ und $\frac{d\phi}{dN}$ nur die Theile des ganzen Werthes dieser Funktionen zu verstehen, welche durch die Veränderung des magnetischen Zustandes entstanden oder verschwunden sind. Bezeichnet man also den Werth, welchen ϕ in dem Endzustand des Magneten besitzt, durch ϕ'' , und nimmt an, daß dieser Zustand aus einem andern hervorgegangen ist, in welchem ϕ den Werth ϕ' hatte, so wird der durch diese Veränderung des magnetischen Zustandes inducirte Strom den Ausdruck haben

$$J^{(\mu)} = \epsilon \epsilon' \Sigma V \left(\frac{d\phi'}{dN} - \frac{d\phi''}{dN} \right) D\omega, \quad (14)$$

oder auch

$$J^{(\mu)} = \epsilon \epsilon' \Sigma \frac{dV}{dN} (\phi' - \phi'') D\omega. \quad (15)$$

Das dreifache Integral, wodurch $J^{(\mu)}$ in (6) ausgedrückt ist, läßt sich immer, welche Werthe α' , β' , γ' auch haben, auf eine Integration nach der Oberfläche des Magneten zurückführen. Der Gaußsche Satz, daß statt des im Innern des Magneten vertheilten Magnetismus immer eine Vertheilung desselben auf seiner Oberfläche gesetzt werden kann, welche dieselbe Wirkung auf einen äußern Pol ausübt, giebt die Gleichheit der beiden Ausdrücke von Q in (6) und (10) des vorigen §, d. i.

$$\Sigma \left\{ \alpha' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\xi} + \beta' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\eta} + \gamma' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{d\zeta} \right\} D\xi D\eta D\zeta = \Sigma \frac{x}{r} D\omega,$$

wo r die Entfernung eines Elements des Magneten oder seiner Oberfläche von einem außerhalb derselben gelegenen Punkte bezeichnet. Diese Gleichung kann auf die Weise erweitert werden, daß statt $\frac{1}{r}$ das Potential von Massen gesetzt wird, welche auf eine beliebige Weise außerhalb der Oberfläche des Magneten vertheilt sind. Setzt man nämlich $U = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \dots$, so giebt jedes Glied in dem Werthe von U eine Gleichung wie die vorstehende, und die Summe aller dieser Gleichungen giebt

$$\Sigma \left\{ \alpha' \frac{dU}{d\xi} + \beta' \frac{dU}{d\eta} + \gamma' \frac{dU}{d\zeta} \right\} D\xi D\eta D\zeta = \Sigma x U D\omega.$$

Hieraus folgt, daß der Ausdruck für $J^{(\mu)}$ in (6), da nach (7) die Größen A, B, C die partiellen Differentialquotienten von V sind, und V als das Potential von außerhalb des Magneten gelegenen Massen angesehen werden kann, auch die folgende Form annimmt,

$$(16) \quad J^{(\mu)} = -\epsilon\epsilon' \sum \kappa V D\omega.$$

Eine Veränderung des magnetischen Zustandes, in welcher der freie Magnetismus an der Oberfläche aus κ' in κ'' übergeht, erzeugt also allgemein den Integralstrom

$$(17) \quad J^{(\mu)} = \epsilon\epsilon' \sum (\kappa' - \kappa'') V D\omega.$$

§. 9.

Ich werde jetzt die Formel (14) des vorigen §, welche den durch die Veränderung des magnetischen Zustandes eines Magneten erregten Induktionsstrom ausdrückt, aus einem allgemeinen Princip ableiten. Ich gehe hiebei von der Betrachtung des Stroms aus, welcher in einem geschlossenen Leiter durch eine Ortsveränderung, sei es des Magneten oder des Leiters, inducirt wird. Es ist leicht nachzuweisen, daß dieser Strom allein von der durch die Ortsveränderung hervorgebrachten Veränderung des Werths des Potentials abhängt, durch welches die Wirkung eines von der Einheit des Stroms durchströmten Leiters auf einen Magneten dargestellt wird. Ich verallgemeinere dies Resultat, und setze als Princip:

daß die Veränderung des Potentials, durch welches die Wirkung eines von der Einheit des Stromes durchströmten Leiters auf einen Magneten dargestellt wird, die Ursache und das Maass des inducirten Stromes ist, und es hiebei gleichgilt, wodurch diese Veränderung des Werthes des Potentials hervorgebracht wird, ob durch eine veränderte relative Lage des Magneten und des Leiters oder durch einen andern Umstand, wie z. B. durch eine Schwächung des Magneten.

Der in einem geschlossenen Leiter durch die Bewegung eines Magneten inducirte Strom, den ich kurzweg durch J bezeichnen werde, ist vollständig durch die Formel (15) §. 7 ausgedrückt, oder durch die Formel (1) des vorhergehenden §,

$$J = -\epsilon\epsilon' \sum \int \kappa \{A d\xi + B d\eta + C d\zeta\} D\omega,$$

wo A, B, C die Componenten der Wirkung des von der Stromeinheit durchströmten Leiters auf die Einheit der magnetischen Flüssigkeit in $D\omega$ darstellen und die in (1) §. 8 angegebenen Werthe haben. Es ist aber $D\omega$ das Element der magnetischen Oberfläche, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, und $\partial\xi, \partial\eta, \partial\zeta$ sind seine elementaren Verrückungen im Sinne dieser Coordinaten.

Da der Leiter eine geschlossene Curve bildet, so gelten für A, B, C die Gleichungen (7) des vorigen §, und ihre Substitution giebt

$$J = -\epsilon\epsilon' \sum \kappa \left\{ \frac{dV}{d\xi} \partial\xi + \frac{dV}{d\eta} \partial\eta + \frac{dV}{d\zeta} \partial\zeta \right\} D\omega,$$

woraus erhellt, daß die durch $\int$ bezeichnete Integration sich ausführen läßt. Bezeichnet man durch V' und V'' die Werthe, welche V an dem Anfangs- und Endpunkte der Bahn hat, auf welcher $D\omega$ sich bewegt, so erhält man

$$J = \epsilon\epsilon' \sum \kappa (V' - V'') D\omega. \quad (1)$$

Hat sich der Magnet aus sehr großer Entfernung dem Leiter genähert, so ist $V' = 0$ und

$$(J) = -\epsilon\epsilon' \sum \kappa V'' D\omega. \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) drücken auch den Induktionsstrom aus, welcher erregt wird, wenn sich statt des Magneten der Leiter bewegt.

Wenn der magnetische Zustand ein Gleichgewichtszustand zwischen Kräften, die sich durch ein Potential darstellen lassen, und dem durch sie erregten Magnetismus ist, so läßt sich κ mittelst der im vorigen § mit ϕ bezeichneten Funktion durch die Formel

$$\kappa = \frac{d\phi}{dN} \quad (3)$$

darstellen. Die Gröfse ϵV ist das Potential des von dem Strome ϵ durchströmten Leiters in Bezug auf die Einheit der magnetischen Flüssigkeit in $D\omega$. Ich nenne es kurzweg das Potential des Leiters. Demnach werde ich die Gröfse $\epsilon \sum \kappa V D\omega$ das Potential des Leiters in Bezug auf den ganzen Magnet, oder was identisch ist, das Potential des Magneten in Bezug auf den ganzen Leiter nennen. Die Gleichung (1) sagt also: die elektromotorische Kraft, welche in einem geschlossenen Leiter durch einen Magnet inducirt wird, sei es daß der Magnet oder der Leiter bewegt wird, ist gleich der Dif-

ferenz der Werthe, welche das Potential des Leiters in Bezug auf den ganzen Magnet am Anfang und Ende der Bewegung annimmt. — Nähert sich der Magnet aus großer Entfernung dem Leiter oder umgekehrt der Leiter dem Magneten, so ist nach (2) die inducirte elektromotorische Kraft dem Werthe gleich, welchen das Potential des Leiters in Bezug auf den ganzen Magnet in derjenigen Lage annimmt, in welcher die Bewegung aufhört. Es ist gleichgültig, ob der Magnet oder der Leiter oder auch beide zugleich, auf welchen Bahnen und in welcher Art sie bewegt werden, ob mit rein fortschreitender oder mit drehender Bewegung. Die erregte elektromotorische Kraft hängt allein von der Grösse der Veränderung ab, welche das Potential erfährt. Hat dieses am Anfang und Ende der Bewegung denselben Werth, so ist die erregte elektromotorische Kraft gleich Null. — Man kann den Grund für die Induktion also nicht in der Bewegung an sich, sondern allein in der dadurch hervorgebrachten Änderung im Werthe des Potentials suchen, und es muß demnach gleichgültig sein, wodurch diese Veränderung selbst hervorgebracht ist. Jeder Umstand, wodurch das Potential des Leiters in Bezug auf den ganzen Magnet verändert wird, kann als die Ursache eines Induktionsstroms angesehen werden, und dessen Stärke ist dem Zuwachs gleich, welchen das durch den Leitungswiderstand dividirte Potential des Leiters erfährt. Ein solcher Umstand ist die Veränderung des magnetischen Zustandes des Magneten. Den Werth des dadurch erregten Induktionsstroms, welchen ich wie im vorigen § durch $J^{(\mu)}$ bezeichnen will, erhält man sofort als die Differenz der Werthe, welche das Potential des Leiters in Bezug auf den ganzen Magnet in den beiderlei Zuständen des letztern annimmt. Es sei κ' die Dicke der magnetischen Schicht an der Oberfläche des Magneten, und diese werde in κ'' verändert. Das Potential des Leiters in Bezug auf den Magnet in dem ersten und zweiten Zustande ist respektive $\epsilon \sum \kappa' V D\omega$, $\epsilon \sum \kappa'' V D\omega$, wo ϵV dieselbe Bedeutung wie vorher hat. Demnach ist

$$(4) \quad J^{(\mu)} = \epsilon \epsilon' \sum (\kappa' - \kappa'') V D\omega,$$

oder wenn beide magnetischen Zustände solche Gleichgewichtszustände sind, daß nach (3) $\kappa' = \frac{d\phi'}{dN}$ und $\kappa'' = \frac{d\phi''}{dN}$ gesetzt werden kann,

$$J^{(u)} = \varepsilon \varepsilon' \sum \left(\frac{d\phi'}{dN} - \frac{d\phi''}{dN} \right) V D\omega, \quad (5)$$

welches genau der Ausdruck (14) in §. 8 ist.

§. 10.

Das Princip, welches im vorigen § zu dem Ausdruck (4) oder (5) geführt hat, läßt sich auf diejenigen Ströme ausdehnen, welche in einem ruhenden Leiter durch einen ruhenden galvanischen Strom inducirt werden, der in seiner Intensität eine Änderung erleidet. Zu diesem Zwecke werde ich zunächst den Ausdruck für diejenigen Ströme weiter entwickeln, welche inducirt werden, wenn sich ein Leiter unter dem Einfluß eines galvanischen Stroms bewegt, und entweder der Leiter oder der inducirende Strom eine geschlossene Curve bildet. Es bewege sich der Leiter unter dem Einfluß eines geschlossenen galvanischen Stroms. Der inducirte Strom ist nach (6) §. 3

$$J = - \varepsilon \varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S \{ X_r \partial x + Y_r \partial y + Z_r \partial z \} Ds, \quad (1)$$

wo Ds das Element des inducirten Leiters ist, dessen Coordinaten und Projectionen respective durch x, y, z und Dx, Dy, Dz bezeichnet werden, X_r, Y_r, Z_r die Componenten der Wirkung sind, welche der galvanische Strom auf die Einheit des Stroms in Ds ausübt, und $\partial x, \partial y, \partial z$ die Verrückungen, welche Ds erfährt. — Da der galvanische Strom eine geschlossene Curve bildet, kann man nach einem Ampèreschen Satze seine Wirkung auf Ds durch die Summe der Wirkungen von unendlich vielen unendlich kleinen Strömen ersetzen. Man hat durch seine geschlossene Curve eine durch sie begrenzte, übrigens beliebige Oberfläche zu legen, diese in Elemente zu zerlegen und jedes Element in seiner Peripherie von einem Strome umkreist zu denken, in demselben Sinne und von derselben Stärke als der gegebene galvanische Strom. Diese unendlich kleinen Ströme ersetzen in ihrer Summe den gegebenen endlichen Strom. Ich nenne $D\omega$ das Element der Oberfläche; der Strom, welcher in seiner Peripherie fließt, wirkt auf das Leiterelement wie ein magnetisches Atom, dessen Axe die Richtung der Normale an $D\omega$ hat und dessen magnetisches Moment nach der Axe $\frac{1}{2}jD\omega$ ist, wenn j die Intensität des gegebenen galvanischen Stroms

bedeutet. Nennt man X, Y, Z die Componenten der Wirkung, welche $D\omega$ auf die Einheit des Stroms in Ds ausübt, so ist

$$(2) \quad X_\epsilon Ds = \Sigma X, \quad Y_\epsilon Ds = \Sigma Y, \quad Z_\epsilon Ds = \Sigma Z,$$

wo Σ die über die ganze, durch die gegebene Stromcurve begrenzte Oberfläche auszudehnende Integration bezeichnet. Die Werthe von X, Y, Z erhält man aus (2) §. 5, wenn dort von den Gliedern rechter Hand die partiellen Differentialen nach der Normale an $D\omega$, welche durch ν bezeichnet werden soll, genommen werden und $\frac{1}{2}jD\omega$ statt κ' gesetzt wird,

$$(3) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{2}j \frac{d}{d\nu} \{(z - \zeta) Dy - (y - \eta) Dz\} \frac{D\omega}{r^3}, \\ Y = \frac{1}{2}j \frac{d}{d\nu} \{(x - \xi) Dz - (z - \zeta) Dx\} \frac{D\omega}{r^3}, \\ Z = \frac{1}{2}j \frac{d}{d\nu} \{(y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy\} \frac{D\omega}{r^3}. \end{cases}$$

Die Vergleichung der vorstehenden Formeln (1), (2), (3) mit den entsprechenden unter (1) und (2) in §. 5 zeigt, daß hier eine ähnliche Transformation zulässig ist wie dort, und daß also J in zwei Theile zerlegt werden kann, von denen der zweite fortfällt, wenn der Leiter keine drehende Bewegung besitzt, oder wenn er eine geschlossene Curve bildet. Ich werde diese beiden Theile auch hier durch J_p und J_d bezeichnen. Dann erhält man nach Anleitung der Formeln (20), (21) und (29) in §. 5

$$J = J_p + J_d,$$

$$(4) \quad J_p = -\frac{1}{2}\epsilon\epsilon'j\Sigma D\omega \frac{d}{d\nu} \int_{w_0}^{w_1} \{X_p \partial\xi + Y_p \partial\eta + Z_p \partial\zeta\},$$

$$(5) \quad \begin{cases} X_p = S \frac{1}{r^3} \{(y, -\eta) Dz, - (z, -\zeta) Dy\}, \\ Y_p = S \frac{1}{r^3} \{(z, -\zeta) Dx, - (x, -\xi) Dz\}, \\ Z_p = S \frac{1}{r^3} \{(x, -\xi) Dy, - (y, -\eta) Dx\}, \end{cases}$$

$$r^2 = (x, -\xi)^2 + (y, -\eta)^2 + (z, -\zeta)^2,$$

$$(6) \quad J_d = -\frac{1}{2}\epsilon\epsilon'j\Sigma D\omega \frac{d}{d\nu} \int \left[\cos l' \frac{x, -\xi}{r} + \cos m' \frac{y, -\eta}{r} + \cos n' \frac{z, -\zeta}{r} \right] d\psi.$$

In diesen Ausdrücken wird der Leiter als ruhend gedacht; statt seiner bewegt sich der galvanische Strom und mit ihm das Flächenelement $D\omega$ in entgegengesetzter Richtung. Die von der Zeit abhängigen Coordinaten des Elements $D\omega$, nämlich ξ, η, ζ , sind durch (15) §. 5 bestimmt, wenn die gegebene Bewegung des Leiters durch (4) daselbst ausgedrückt wird.

Wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet, so ist

$$J_d = 0,$$

und die Größen X_p, Y_p, Z_p , welche die Componenten der Wirkung des Leiters auf die Einheit der in dem Punkte (ξ, η, ζ) concentrirt gedachten magnetischen Flüssigkeit vorstellen, sind die partiellen Differentialquotienten einer Funktion V_p nach ξ, η, ζ . Dies ist ein schon oft erwähnter Ampèrescher Satz; es läßt sich aber auch leicht direkt aus (5) nachweisen, daß wenn der Leiter geschlossen ist,

$$\frac{dX_p}{d\eta} = \frac{dY_p}{d\xi}, \quad \frac{dX_p}{d\zeta} = \frac{dZ_p}{d\xi}, \quad \frac{dY_p}{d\zeta} = \frac{dZ_p}{d\eta}$$

ist. Die Funktion εV_p ist das Potential des Leiters, bezogen auf die Einheit der magnetischen Flüssigkeit in dem Punkte (ξ, η, ζ) . Setzen wir nun in (4)

$$X_p = \frac{dV_p}{d\xi}, \quad Y_p = \frac{dV_p}{d\eta}, \quad Z_p = \frac{dV_p}{d\zeta},$$

so wird die unter dem Integralzeichen $\int$ stehende GröÙe das vollständige Differential von V_p . Bezeichnen wir die Grenzwerte, die V_p am Anfang und Ende der Bewegung hat, durch V'_p und V''_p , so wird

$$J_p = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon' j \Sigma D\omega \frac{d}{d\nu} (V'_p - V''_p). \quad (7)$$

Wir haben den galvanischen Strom als ruhend, den Leiter als bewegt vorausgesetzt. Auf diesen Fall läßt sich der umgekehrte, wo der Leiter ruht und der inducirende Strom bewegt wird, zurückführen, da nach dem Satze in §. 4 statt der Bewegung des Stroms immer die entgegengesetzte des Leiters substituirt werden kann, vorausgesetzt daß dadurch die Grenzen der Integrationen S und Σ nicht geändert werden. Demnach drücken (4) und (6) auch die Ströme aus, welche in einem Leiter durch die Bewegung eines geschlossenen galvanischen Stroms inducirt werden, und in ihnen haben $\xi, \eta, \zeta, \partial\xi, \partial\eta, \partial\zeta$ die der wirklichen Bewegung des Elements $D\omega$ ent-

sprechenden Werthe. Ist der inducirte Leiter geschlossen, so gilt auch in diesem Falle die Gleichung (7).

Die Gröfse $\frac{1}{2} \epsilon j \Sigma D \omega \frac{dV_p}{dv}$ ist das Potential des geschlossenen Leiters, bezogen auf den ganzen galvanischen Strom. Demnach ergibt sich aus (7) folgender Satz: die in einem geschlossenen Leiter durch einen geschlossenen galvanischen Strom inducirte elektromotorische Kraft, sei es dafs der Leiter oder der Strom eine Ortsveränderung erfährt, ist gleich der Differenz der Werthe, welche das Potential des Leiters, bezogen auf den ganzen galvanischen Strom, am Anfang und Ende der Bewegung besitzt.

Die Formeln (4) und (6) setzen voraus, dafs der inducirende Strom ein geschlossener sei. Ich werde jetzt den Fall entwickeln, wo der inducirte Leiter eine geschlossene Curve bildet, und annehmen, dafs der Leiter ruht und der Strom bewegt wird. Nach (7) §. 4 ist der inducirte Strom

$$(8) \quad J = - \epsilon \epsilon' \Sigma \int_{w_0}^{w_1} \{ X_s \partial \xi + Y_s \partial \eta + Z_s \partial \zeta \} D\sigma,$$

wo X_s , Y_s , Z_s die Componenten der Wirkung des von der Einheit des Stroms durchströmten Leiters auf das Stromelement $D\sigma$ sind. Da der Leiter eine geschlossene Curve bildet, so lassen sich diese Componenten ganz entsprechend, wie oben in (1) und (2) die Componenten X_e , Y_e und Z_e , ausdrücken, nämlich

$$(9) \quad \begin{cases} X_s D\sigma = - \frac{1}{2} j S \frac{d}{dn} \cdot \frac{1}{r^3} \{ (z, - \zeta) D\eta - (y, - \eta) D\zeta \} D\sigma, \\ Y_s D\sigma = - \frac{1}{2} j S \frac{d}{dn} \cdot \frac{1}{r^3} \{ (x, - \xi) D\zeta - (z, - \zeta) D\xi \} D\sigma, \\ Z_s D\sigma = - \frac{1}{2} j S \frac{d}{dn} \cdot \frac{1}{r^3} \{ (y, - \eta) D\xi - (x, - \xi) D\eta \} D\sigma, \end{cases}$$

$$r^2 = (x, - \xi)^2 + (y, - \eta)^2 + (z, - \zeta)^2,$$

wo $D\sigma$ das Element einer beliebigen durch den Leiter begrenzten Oberfläche ist, und das Integral S über diese Oberfläche ausgedehnt, durch $\frac{d}{dn}$ aber der nach der Normale n an dem Element $D\sigma$ genommene Differentialquotient bezeichnet wird. Durch Substitution dieser Werthe in (8) kann man mit dieser Gleichung dieselben Transformationen vornehmen, durch welche aus (1) die Gleichungen (2), (5), (6) abgeleitet sind. Man erhält dann

$$J = J_p + J_d,$$

$$J_p = -\epsilon\epsilon'jS \frac{d}{dn} \int_{w_0}^{w_1} (X_\pi \partial x + Y_\pi \partial y + Z_\pi \partial z), \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} X_\pi &= -\sum \frac{1}{r^3} \{ (y - \eta_i) D\zeta - (z - \zeta_i) D\eta \}, \\ Y_\pi &= -\sum \frac{1}{r^3} \{ (z - \zeta_i) D\xi - (x - \xi_i) D\zeta \}, \\ Z_\pi &= -\sum \frac{1}{r^3} \{ (x - \xi_i) D\eta - (y - \eta_i) D\xi \}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$r^2 = (x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z - \zeta_i)^2,$$

$$J_d = -\frac{1}{2}\epsilon\epsilon'jSD_0 \frac{d}{dn} \int \left[\cos l \frac{x - \xi_i}{r} + \cos m \frac{y - \eta_i}{r} + \cos n \frac{z - \zeta_i}{r} \right] d\psi. \quad (12)$$

Wenn der inducirende Strom eine geschlossene Curve bildet, so ist

$$J_d = 0,$$

und die Gröfsen jX_π , jY_π , jZ_π sind, da sie die Componenten der Wirkung des inducirenden Stroms auf die Einheit der magnetischen Flüssigkeit in dem Punkte (x, y, z) vorstellen, die nach den Coordinaten x , y , z genommenen partiellen Differentialquotienten des Potentials des inducirenden Stroms. Ich nenne dieses Potential jV_π , so dafs

$$X_\pi = \frac{dV_\pi}{dx}, \quad Y_\pi = \frac{dV_\pi}{dy}, \quad Z_\pi = \frac{dV_\pi}{dz}.$$

Wenn man diese Werthe in (10) setzt, die Integration $\int$ ausführt und die beiden Endwerthe von V_π mit V'_π und V''_π bezeichnet, so erhält man

$$J_p = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon'jSD_0 \frac{d}{dn} (V'_\pi - V''_\pi). \quad (13)$$

Die Formeln (10), (11), (12) gelten auch, wenn statt des galvanischen Stromes der Leiter eine Bewegung erhält, und x , y , z , ∂x , ∂y , ∂z die dieser Bewegung angehörigen Werthe bekommen. Es ist also auch in Bezug auf die Formel (13) gleichgültig, ob der Strom oder der Leiter seinen Ort verändert. Die Gröfse $\frac{1}{2}j\epsilon SD_0 \frac{dV_\pi}{dn}$ ist das Potential des Stroms, bezogen auf den ganzen von einem Strome ϵ durchströmt gedachten Leiter. Hieraus geht hervor, dafs man in dem oben aus (7) abgeleiteten Satze statt des auf den Strom bezogenen Potentials des Leiters auch das auf den

ganzen Leiter bezogene Potential des Stroms setzen kann. Dies sind in der That identische Bezeichnungen derselben Gröfse. Da nemlich V_π das auf die Einheit der magnetischen Flüssigkeit in dem Punkte (x, y, z) bezogene Potential der Oberfläche ω ist, deren zwei Seiten von den zwei entgegengesetzten magnetischen Flüssigkeiten mit der Dichtigkeit $\frac{1}{dv}$ gleichförmig bedeckt gedacht werden, so ist

$$(11) \quad V_\pi = \sum D\omega \frac{d\frac{1}{r}}{dv}.$$

Ebenso ist

$$V_p = S D o \frac{d\frac{1}{r}}{dn},$$

wo

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Setzt man diese Werthe respective in (13) und (7), und bezeichnet mit r' und r'' die Werthe von r am Anfang und Ende der Bewegung, so fallen beide Ausdrücke für J_p zusammen und geben:

$$(14) \quad J_p = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j S \sum D o D \omega \frac{d^2}{dn dv} \left\{ \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right\}.$$

Die Formeln (7), (13), (14) zeigen, daß die Induktion, welche ein geschlossener Leiter durch einen geschlossenen galvanischen Strom erfährt, von der Bewegung an sich, sei es des Leiters oder des Stroms, unabhängig ist, und daß sie allein von der durch die Bewegung hervorgebrachten Veränderung des Werthes des auf den Leiter bezogenen Potentials des Stroms abhängt. Ich folgere hieraus, daß es überhaupt gleichgültig ist, wodurch der Werth des Potentials verändert wird, und daß jeder Umstand, der denselben verändert, die Ursache einer Induktion ist. Es wird also in dem geschlossenen Leiter, auch wenn die Intensität eines in seiner Nähe befindlichen galvanischen Stroms verändert wird, ein Induktionsstrom erregt werden, und die elektromotorische Kraft dieses Stroms wird die Differenz der Werthe des auf den Leiter bezogenen Potentials des Stroms in seinen beiden Endzuständen sein. Ich werde den inducirten Strom mit $J^{(y)}$ bezeichnen, und mit j' und j'' die Anfangs- und Endintensität des galvanischen Stroms; dann ist

$$(16) \quad J^{(y)} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' (j' - j'') S D o \frac{dV_\pi}{dn} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' (j' - j'') \sum D \omega \frac{dV_p}{dv},$$

oder

$$(17) \quad J^{(y)} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' (j' - j'') S \sum D o D \omega \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dn dv}.$$

In wieweit diese Formeln eine Anwendung auf die Fälle gestatten, in denen ein galvanischer Strom plötzlich auftritt oder unterbrochen wird, bedarf noch experimenteller Prüfung. Denn sie setzen voraus, daß die Geschwindigkeit, mit welcher die inducirende Ursache eintritt, im Verhältniß zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität in den inducirten Leitern gering ist. Noch zweifelhafter wird die Anwendbarkeit dieser Formeln da, wo innerhalb einer sehr kurzen Zeit die inducirende Ursache aus dem Positiven ins Negative übergeht. Ein schönes Beispiel aber für die Anwendung der verschiedenen Formeln geben die Ströme, welche durch das im Verhältniß zur elektrischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit langsame Anschwellen der magnetoelektrischen Ströme inducirt werden. Unter Annahme der Anwendbarkeit der Formeln (16) oder (17) auf die durch das plötzliche Auftreten oder Verschwinden von galvanischen Strömen erregte Induktion kann man sagen: der durch das plötzliche Auftreten eines galvanischen Stroms in einem ruhenden Leiter inducirte Strom ist derselbe, als hätte sich der Leiter aus großer Entfernung her dem Strom bis an die Stelle, wo er sich befindet, genähert.

§. 11.

Der inducirte Integralstrom hängt im Allgemeinen von einer dreifachen Integration ab, welche sich auf die Curve des inducirenden Stroms, auf die Curve des inducirten Leiters und drittens auf die Bahn bezieht, auf welcher ein Element sei es des inducirenden Stroms oder des inducirten Leiters bewegt wird, und welche von der Stelle des Elements in seiner Curve abhängt. Die Einführung des Potentials der magnetischen Oberflächen, wenn Strom und Leiter geschlossene Curven bilden, erlaubt allgemein die Ausführung der dritten Integration, setzt aber an die Stelle der beiden ersten Integrationen eine vierfache über die beiden Oberflächen. Ich werde jetzt nachweisen, daß wenn entweder die Curve des inducirenden Stroms oder des inducirten Leiters eine geschlossene ist, allgemein die dreifache Integration sich auf ein Doppelintegral zurückführen läßt. Dies Doppelintegral reducirt sich auf eine einfache Quadratur, wenn die geschlossene Curve im Verhältniß zu ihrer Entfernung von der andern Curve sehr kleine Dimensionen hat, wie dies z. B. bei einem Solenoid der Fall ist, welches ein magnetisches Atom vorstellt.

Der in einem Leiter s , welcher sich unter dem Einfluß eines galvanischen Stroms σ bewegt, inducirte Strom ist nach (6) §. 3,

$$(1) \quad J = -\epsilon\epsilon' S \int_{\omega_0}^{\omega_1} \{X_s \partial x + Y_s \partial y + Z_s \partial z\} Ds,$$

wo die Gröſſen $X_s Ds$ u. s. w. die Componenten der Gesamtwirkung bedeuten, welche der inducirende Strom σ auf das Element Ds des bewegten Leiters ausübt, und $\partial x, \partial y, \partial z$ die Projektionen des Elements $\partial\omega$ der Bahn sind, auf welcher Ds bewegt wird. Wenn der inducirende Strom von der Intensität j eine geschlossene Curve bildet, so lassen sich die von Ampère gegebenen Ausdrücke für die Componenten seiner Wirkung auf das Element Ds , dieses von der Einheit des Stroms durchströmt gedacht, so darstellen:

$$(2) \quad \begin{cases} X_s Ds = \frac{1}{2} j \Sigma \left\{ \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\xi - \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\zeta \right) Dz - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\eta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\xi \right) Dy \right\}, \\ Y_s Ds = \frac{1}{2} j \Sigma \left\{ \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\eta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\xi \right) Dx - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\zeta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\eta \right) Dz \right\}, \\ Z_s Ds = \frac{1}{2} j \Sigma \left\{ \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\zeta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\eta \right) Dy - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\xi - \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\zeta \right) Dx \right\}, \end{cases}$$

wo $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$.

Substituirt man diese Werthe in (1) und ordnet das Resultat nach $D\xi, D\eta, D\zeta$, so erhält man für den Theil desselben, welcher von $D\xi$ abhängt,

$$(3) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \epsilon\epsilon' j \Sigma S \int \left\{ \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} Dz \right) \partial x \right. \\ & \left. - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} \partial x + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} \partial y + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} \partial z \right) Dx \right\} D\xi, \end{aligned}$$

woraus sich die von $D\eta$ und $D\zeta$ abhängigen Theile leicht bilden lassen, indem man die außerhalb der Parenthesen stehenden $D\xi, Dx, \partial x$ respective mit $D\eta, Dy, \partial y$ oder $D\zeta, Dz, \partial z$ vertauscht. Da man statt der partiellen Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ nach ξ, η, ζ die negativen nach x, y, z schreiben kann, so erhält man durch partielle Integration in Bezug auf das Element Ds ,

$$S \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} Dz \right) \partial x = -\frac{1}{r} \partial x + S \frac{1}{r} \cdot \frac{D \cdot \partial x}{Ds} Ds,$$

und durch partielle Integration in Bezug auf das Element $\partial\omega$ der Bahn ω , welche das Element Ds beschreibt,

$$\int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} \partial x + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} \partial y + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} \partial z \right) Dx = -\frac{1}{r} Dx + \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \cdot Dx}{\partial \omega} \partial \omega.$$

Da nun
$$\int S \frac{1}{r} \cdot \frac{D \cdot \partial x}{Ds} Ds = \int S \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \cdot Dx}{\partial \omega Ds} \partial \omega Ds = \int S \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \cdot Dx}{\partial \omega} \partial \omega,$$

so erhält man durch Substitution der vorstehenden Ausdrücke in (3),

$$\frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j \Sigma \left\{ \int \frac{\partial x}{r} - S \frac{Dx}{r} \right\} D\xi.$$

Da hieraus die beiden andern Theile von J durch respective Vertauschung von $D\xi$, Dx , ∂x mit $D\eta$, Dy , ∂y und $D\zeta$, Dz , ∂z abgeleitet werden, so wird

$$J = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j \left\{ \Sigma \int_{s,}^{s''} \frac{D\xi \partial x + D\eta \partial y + D\zeta \partial z}{r \partial s} \partial s - \Sigma S_{s''}^{s'} \frac{D\xi Dx + D\eta Dy + D\zeta Dz}{r D\omega} D\omega \right\}, \quad (4)$$

wo s , und s'' , die Grenzen von s und ω , ω'' , die Grenzen von ω bedeuten. Die dreifache Integration in (1) ist hierdurch auf eine doppelte zurückgeführt.

Die Form des vorstehenden Ausdrucks wird einfacher, wenn der bewegte Leiter eine geschlossene Curve bildet, oder auch wenn derselbe zwar keine geschlossene Curve bildet, aber sich auf einer geschlossenen Bahn bewegt, d. h. wenn er am Ende seiner Bewegung in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Ich werde diese beiden Fälle besonders betrachten, und dann zu dem allgemeinen Falle, wo weder der Leiter noch die Bahn geschlossen ist, zurückkehren.

1) Wenn der Leiter eine geschlossene Curve bildet, fällt der von den Grenzen s , und s'' abhängige Theil in (4) fort, und man hat

$$J = -\frac{1}{2} \epsilon \epsilon' j \Sigma S_{s''}^{s'} \frac{D\xi Dx + D\eta Dy + D\zeta Dz}{r D\omega} D\omega. \quad (5)$$

Wir fanden aber im vorhergehenden §, daß die in einem geschlossenen Leiter durch einen geschlossenen Strom inducirte elektromotorische Kraft dem Unterschiede der Werthe gleich ist, welche das Potential des Stroms in Bezug auf den vom Strome ϵ durchströmten Leiter am Anfang und am Ende der Bewegung annimmt. Hieraus folgt, daß durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \epsilon j \Sigma S \frac{1}{r} (D\xi Dx + D\eta Dy + D\zeta Dz) = V$$

das Potential eines geschlossenen Stroms σ von der Intensität j in Bezug auf einen andern geschlossenen Strom s von der Intensität ϵ dargestellt wird. Das Potential zweier geschlossenen Ströme von der Intensität 1 in Bezug auf einander ist also die halbe Summe der Produkte der Elemente des einen Stroms mit den Elementen des andern, jedes Produkt zweier Elemente multiplicirt mit dem Cosinus ihrer Neigung und dividirt durch ihre gegenseitige Entfernung.

Dieser Satz kann auch direkt aus dem Gesetz abgeleitet werden, das die Wirkung eines Elements eines geschlossenen Stroms auf ein Element eines andern geschlossenen Stroms bestimmt, und welches sich aus den Ampèreschen Formeln ergibt, bisher aber noch nicht ausgesprochen worden zu sein scheint: Die Anziehung, welche zwei Elemente verschiedener geschlossener Ströme auf einander ausüben, ist umgekehrt dem Quadrate ihrer Entfernung und direkt dem Cosinus ihrer gegenseitigen Neigung proportional. Man findet dies sofort aus den Ausdrücken in (1). Man erhält z. B. aus dem ersten derselben

$$SX_{\sigma}Ds = \frac{1}{2}j\sum S \left\{ \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} Dz \right) D\xi \right. \\ \left. - (DxD\xi + DyD\eta + DzD\zeta) \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} \right\},$$

woraus sich wegen $\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}$ u. s. w., wenn man r , und r'' , die dem Anfangs- und Endpunkte von s entsprechenden Werthe von r nennt, ergibt

$$SX_{\sigma}Ds = \frac{1}{2}j\sum \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r''} \right) D\xi - \frac{1}{2}j\sum S \frac{x-\xi}{r^3} (DxD\xi + DyD\eta + DzD\zeta).$$

Ist s eine geschlossene Curve, so ist $r = r''$, und demnach

$$SX_{\sigma}Ds = -\frac{1}{2}j\sum S \frac{x-\xi}{r^3} (DxD\xi + DyD\eta + DzD\zeta).$$

Man kann also unter der Voraussetzung, daß σ und s geschlossene Curven sind und in ihnen die Stromeinheiten fließen, die gegenseitige Wirkung zweier Elemente Ds und $D\sigma$ so ansehen, als wenn sie in der Richtung ihrer Verbindungslinie r und mit der Intensität

$$-\frac{1}{2} \frac{D\xi Dx + D\eta Dy + D\zeta Dz}{r^2} = -\frac{1}{2r^2} \cos(D\sigma, Ds) D\sigma Ds$$

stattfände, wo $(D\sigma, Ds)$ den Winkel bedeutet, unter welchem $D\sigma$ gegen Ds geneigt ist. Hieraus folgt, daß

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{r} \cos(D\sigma, Ds) D\sigma Ds$$

das Potential des Stroms σ in Bezug auf das Element Ds und

$$\frac{1}{2} S \sum \frac{1}{r} (D\sigma, Ds) D\sigma Ds$$

das Potential von σ in Bezug auf s ist.

2) Wenn die Bahn, welche der Leiter durchlaufen hat, eine geschlossene ist, fällt in (4) der von den Grenzen der Bahn ω , und ω'' abhängige Theil fort, und man hat

$$J = \epsilon \epsilon' j \sum \int_{s'}^s \frac{D\xi \partial x + D\eta \partial y + D\zeta \partial z}{r \partial s} \partial s. \quad (6)$$

Aus dieser Formel ergibt sich der Satz: die in einem ungeschlossenen Leiter durch einen geschlossenen Strom inducirte elektromotorische Kraft ist, wenn der Leiter eine geschlossene Bahn durchlaufen hat, die Differenz der Werthe des Potentials des Stroms in Bezug auf die von den Endpunkten des Leiters durchlaufenen Curven, diese Curven von dem Strome ϵ durchströmt gedacht. Die inducirte elektromotorische Kraft ist hier also ebenso von der Gestalt des Leiters unabhängig, wie sie im vorhergehenden Falle des geschlossenen Leiters von dem von ihm durchlaufenen Wege unabhängig war. Wenn sich ein geschlossener Leiter unter dem Einfluß eines geschlossenen Stroms in einer geschlossenen Bahn bewegt, so ist die Summe der in ihm bis zur Rückkehr zu seiner ursprünglichen Lage erregten elektromotorischen Kräfte immer gleich Null. Hieraus folgt, daß durch fortgesetzte Drehung constante Ströme, d. h. solche, deren Differentialströme in jedem Augenblick denselben Werth haben, nur in ungeschlossenen Leitern oder nur unter dem Einfluß ungeschlossener Ströme erzeugt werden können.

3) Ich will jetzt den allgemeinen Fall erörtern, wo weder der inducirte Leiter noch die Bahn, auf welcher er sich bewegt hat, geschlossene Curven sind.

Das Aggegrat von vier Integralen, welches den Ausdruck von J in (4) bildet, ist nichts anderes als das Doppelintegral, in welchem über die geschlossene Curve σ und über die Peripherie des geschlossenen Curvenvierecks integrirt wird, welches die vom Leiter in seiner Bewegung beschriebene Oberfläche begrenzt. Dieses Viereck wird von den Curven (s) , (e) , $(s_{\text{„}})$, $(e_{\text{„}})$ gebildet, von denen (s) und $(s_{\text{„}})$ die Curve des inducirten Leiters selbst am Anfange und Ende seiner Bewegung und (e) und $(e_{\text{„}})$ die während seiner Bewegung von seinen zwei Endpunkten beschriebenen Curven bedeuten. Man kann daher in Folge der Formel (4) den Satz aussprechen:

Die elektromotorische Kraft, welche in einem unter dem Einfluß eines geschlossenen Stroms σ bewegten Leiter s inducirt wird, ist gleich dem Potential von σ in Bezug auf das geschlossene Viereck, welches aus der Curve des Leiters selbst in ihrer Anfangs- und Endposition und den während seiner Bewegung von seinen Endpunkten beschriebenen Curven gebildet wird, wenn dieses Viereck von einem Strome ϵ durchströmt gedacht wird.

Aus diesem Satze lassen sich die Resultate leicht ableiten, welche in (1) und (2) für geschlossene Leiter und für begrenzte Leiter, welche eine geschlossene Bahn beschrieben haben, gefunden worden sind. In den zwei Curven (e) und $(e_{\text{„}})$ hat der Strom ϵ eine entgegengesetzte Richtung, und ebenso in den zwei Curven (s) und $(s_{\text{„}})$. Ist der Leiter geschlossen, so fällt $(e_{\text{„}})$ auf (e) , die in ihnen fließenden Theile heben sich auf und es bleiben nur die beiden geschlossenen Curven (s) und $(s_{\text{„}})$, in welchen die Strömung ϵ eine entgegengesetzte Richtung hat. Ist die Bahn geschlossen, so fällt $(s_{\text{„}})$ auf (s) , die in ihnen fließenden Theile des Stroms heben sich auf und es bleiben nur die entgegengesetzten Ströme in den geschlossenen Curven (e) und $(e_{\text{„}})$.

Da ein Magnet als ein System von geschlossenen Strömen angesehen wird, so gilt der vorstehende Satz auch, wenn die Induktion, statt durch einen geschlossenen Strom, durch einen Magnet hervorgebracht wird. Er findet auch seine Anwendung auf den Fall, wo der inducirte Leiter ruht und der inducirende geschlossene Strom bewegt wird, da man nach §. 4 statt der Bewegung des letztern immer die entgegengesetzte des inducirten Leiters substituiren kann. Wenn ferner der inducirende Strom σ sich bewegt und

ungeschlossen ist, d. h. wenn ein Theil seiner Bahn an der Bewegung keinen Theil nimmt, so giebt derselbe Satz die erregte elektromotorische Kraft, im Fall der inducirte Leiter s eine geschlossene Curve bildet. Nach §. 4 nämlich erhält man dieselbe elektromotorische Kraft wie früher, wo der inducirende Strom in diesem geschlossenen Leiter s strömend und der ungeschlossene Leiter σ als der inducirte Strom angenommen wurde. Endlich bestimmt auch der obige Satz für den Fall, wenn der ungeschlossene inducirende Strom σ ruht, die inducirte elektromotorische Kraft, wenn der Leiter s geschlossen ist. In diesem Falle denkt man sich wieder den inducirenden Strom in dem Leiter s fließen und substituirt statt der Bewegung desselben die entgegengesetzte des Leiters σ .

§. 12.

Als Potential V eines geschlossenen Stromes σ in Bezug auf einen andern geschlossenen Strom s , beide Ströme von der Intensität 1 gesetzt, wurde im vorigen § gefunden:

$$V = \frac{1}{2} S \sum \frac{1}{r} (Dx D\xi + Dy D\eta + Dz D\zeta). \quad (1)$$

Es soll dieser Ausdruck unter der Voraussetzung weiter entwickelt werden, daß σ eine ebene Curve sei, deren Dimensionen im Verhältniß zu r sehr klein sind. Unter dieser Voraussetzung läßt sich der Ausdruck in eine rasch convergirende Reihe entwickeln, die nach den Potenzen der Dimensionen von σ fortschreitet, und wir nehmen diese Dimensionen so klein an, daß nur das erste Glied dieser Reihe zu berücksichtigen ist. Ich werde in (1) statt ξ, η, ζ setzen

$$\xi + \alpha, \quad \eta + \beta, \quad \zeta + \gamma, \quad (2)$$

wo ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunkts von σ sind, welcher zum Anfangspunkt der Coordinaten α, β, γ genommen wird. Diese Coordinaten werde ich durch andere α', β', γ' ausdrücken, von denen α' und β' in der Ebene des Stroms σ liegen, und also γ' auf dieser Ebene senkrecht ist. Es bilde γ' mit γ den Winkel ν und eine durch γ und γ' gelegte Ebene bilde mit α den Winkel ω ; in dieser Ebene und in der Ebene des Stroms liege β' .

Demnach ist

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' \sin \omega - \beta' \cos \nu \cos \omega + \gamma' \sin \nu \cos \omega, \\ \beta &= -\alpha' \cos \omega - \beta' \cos \nu \sin \omega + \gamma' \sin \nu \sin \omega, \\ \gamma &= \beta' \sin \nu + \gamma' \cos \nu. \end{aligned}$$

Ich beziehe die Curve σ auf Polarcoordinaten mit demselben Anfangspunkt; es sei ρ der Radiusvektor eines ihrer Punkte, welcher gegen α' unter dem Winkel ϕ geneigt ist, so wird

$$\alpha' = \rho \cos \phi, \quad \beta' = \rho \sin \phi, \quad \gamma' = 0,$$

wo ρ eine durch die Natur der Curve σ gegebene Funktion von ϕ ist. Es wird also für jeden Punkt der Curve σ ,

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \rho (\sin \omega \cos \phi - \cos \nu \cos \omega \sin \phi), \\ \beta = -\rho (\cos \omega \cos \phi + \cos \nu \sin \omega \sin \phi), \\ \gamma = \rho \sin \nu \sin \phi. \end{cases}$$

Setzt man in (1) für ξ, η, ζ die Werthe (2), so erhält man

$$V = \frac{1}{2} S \Sigma \frac{Dx D\alpha + Dy D\beta + Dz D\gamma}{\{(x - \xi - \alpha)^2 + (y - \eta - \beta)^2 + (z - \zeta - \gamma)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo α, β, γ die durch (3) gegebenen Funktionen von ϕ sind, und Σ eine Integration in Bezug auf ϕ von $\phi = 0$ bis $\phi = 2\pi$ bezeichnet. Entwickelt man die Wurzelgröfse nach den Potenzen der im Verhältnifs zu $V\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\}$ als sehr klein vorausgesetzten Gröfse ρ , so erhält man bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung, da in den angegebenen Grenzen

$\Sigma \frac{Dx D\alpha + Dy D\beta + Dz D\gamma}{\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\}^{\frac{1}{2}}} = 0$ ist,

$$(4) \quad V = \frac{1}{2} S \Sigma \frac{(Dx D\alpha + Dy D\beta + Dz D\gamma) \cdot ((x - \xi)\alpha + (y - \eta)\beta + (z - \zeta)\gamma)}{\{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus den Werthen von α, β, γ in (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha D\alpha &= 0, \quad \Sigma \beta D\beta = 0, \quad \Sigma \gamma D\gamma = 0, \\ \Sigma \alpha D\beta &= -\Sigma \beta D\alpha = -\frac{1}{2} \cos \nu \cdot \Sigma \rho^2 D\phi, \\ \Sigma \alpha D\gamma &= -\Sigma \gamma D\alpha = \frac{1}{2} \sin \nu \sin \omega \cdot \Sigma \rho^2 D\phi, \\ \Sigma \beta D\gamma &= -\Sigma \gamma D\beta = -\frac{1}{2} \sin \nu \cos \omega \cdot \Sigma \rho^2 D\phi, \end{aligned}$$

und demnach wird

$$(5) \quad V = \frac{1}{4} (\Sigma \rho^2 D\phi) S \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{aligned} &\cos \nu ((y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy) \\ &+ \sin \nu \sin \omega ((x - \xi) Dz - (z - \zeta) Dx) \\ &+ \sin \nu \cos \omega ((z - \zeta) Dy - (y - \eta) Dz) \end{aligned} \right\}.$$

Ich werde statt $\frac{1}{2} \Sigma \rho^2 D\phi$, welches der Inhalt des kleinen von dem Strome σ umschlossenen Raumes ist, die Gröfse λ setzen, und die Gröfsen $\cos \nu$, $\sin \nu \sin \omega$, $\sin \nu \cos \omega$ oder die Cosinusse der Winkel, welche die Normale auf der Strom-Ebene σ respective mit z , y , x bildet, als Differentialquotienten von ξ , η , ζ in Bezug auf diese Normale, welche ich durch N bezeichne, ausdrücken, also

$$\cos \nu = \frac{d\xi}{dN}, \quad \sin \nu \sin \omega = \frac{d\eta}{dN}, \quad \sin \nu \cos \omega = \frac{d\zeta}{dN}$$

setzen. Ich werde ferner in (5) statt $\frac{1}{r^3} \{ (y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy \}$ den nach ζ genommenen partiellen Differentialquotient von

$$\left(1 - \frac{z - \zeta}{r}\right) \cdot \frac{(y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy}{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2}, \quad (5)$$

und ebenso statt $\frac{1}{r^3} \{ (x - \xi) Dz - (z - \zeta) Dx \}$ und $\frac{1}{r^3} \{ z - \zeta \} Dy - (y - \eta) Dz \}$ die respective nach η und ξ genommenen partiellen Differentialquotienten der Ausdrücke

$$\left(1 - \frac{y - \eta}{r}\right) \cdot \frac{(x - \xi) Dz - (z - \zeta) Dx}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

$$\left(1 - \frac{x - \xi}{r}\right) \cdot \frac{(z - \zeta) Dy - (y - \eta) Dz}{(z - \zeta)^2 + (y - \eta)^2}$$

setzen. Dadurch verwandelt sich der Werth von V in (5) in den folgenden,

$$V = \frac{1}{2} \lambda S \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\xi}{dN} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \left(1 - \frac{x - \xi}{r}\right) \cdot \frac{(z - \zeta) Dy - (y - \eta) Dz}{(z - \zeta)^2 + (y - \eta)^2} \right\} \\ & + \frac{d\eta}{dN} \cdot \frac{d}{d\eta} \left\{ \left(1 - \frac{y - \eta}{r}\right) \cdot \frac{(x - \xi) Dz - (z - \zeta) Dx}{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2} \right\} \\ & + \frac{d\zeta}{dN} \cdot \frac{d}{d\zeta} \left\{ \left(1 - \frac{z - \zeta}{r}\right) \cdot \frac{(y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy}{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

oder wenn

$$\left. \begin{aligned} S \cdot \left(1 - \frac{x - \xi}{r}\right) \cdot \frac{(z - \zeta) Dy - (y - \eta) Dz}{(z - \zeta)^2 + (y - \eta)^2} &= K, \\ S \cdot \left(1 - \frac{y - \eta}{r}\right) \cdot \frac{(x - \xi) Dz - (z - \zeta) Dx}{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2} &= L, \\ S \cdot \left(1 - \frac{z - \zeta}{r}\right) \cdot \frac{(y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy}{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} &= M \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

gesetzt wird, in

$$V = \frac{1}{2} \lambda \left\{ \frac{d\xi}{dN} \cdot \frac{dK}{d\xi} + \frac{d\eta}{dN} \cdot \frac{dL}{d\eta} + \frac{d\zeta}{dN} \cdot \frac{dM}{d\zeta} \right\}. \quad (8)$$

Bildet der Strom s , auf welchen sich die Integrationen in (7) beziehen, eine geschlossene Curve, so ist

$$K = L = M,$$

weil alsdann jede dieser Größen das Stück vorstellt, welches auf der mit dem Halbmesser $= 1$ um den Punkt (ξ, η, ζ) beschriebenen Kugelfläche durch den Kegel abgeschnitten wird, welcher aus dem Punkte (ξ, η, ζ) als Spitze durch die Curve s gelegt wird. Ich werde dieses Kugelflächenstück die Kegelöffnung von s in Bezug auf den Punkt (ξ, η, ζ) oder auf den Ort von λ nennen und dasselbe mit K bezeichnen. Hierdurch reduziert sich der Ausdruck in (8) auf

$$(9) \quad V = \frac{1}{2} \lambda \frac{dK}{dN},$$

das heisst: es ist das Potential eines Stroms, welcher den kleinen ebenen Raum λ umkreist, in Bezug auf einen geschlossenen Strom s , wenn in beiden die Stromeinheit strömt, gleich dem Produkt aus $\frac{1}{2} \lambda$ in dem nach der Normale auf λ genommenen Differentialquotienten der Kegelöffnung von s in Bezug auf λ .

Betrachtet man den kleinen Raum λ als den Normalschnitt eines sehr engen Kanals, dessen Axe N ist, und denkt man sich jeden der aufeinanderfolgenden Normalschnitte des Kanals von der Stromeinheit umkreist, so erhält man ein Solenoid. Es sei α die Anzahl der Stromumkreisungen, welche sich auf der Einheit der Länge befinden, so ist die Anzahl solcher Umkreisungen auf dem Element der Axe ∂N gleich $\alpha \partial N$, und demnach das Potential des Solenoidelements in Bezug auf s ,

$$\frac{1}{2} \alpha \lambda \frac{dK}{dN} \partial N.$$

Erstreckt sich das Solenoid von N' bis N'' , und bezeichnet man die zu N' und N'' gehörigen Werthe von K durch K' und K'' , so erhält man als Potential des begrenzten Solenoids in Bezug auf s ,

$$(10) \quad \frac{1}{2} \alpha \lambda \{K'' - K'\}.$$

Liegt das eine Ende N' unendlich weit von s , so ist $K' = 0$, und man erhält also als Potential eines an einem Ende unbegrenzten Solenoids in Bezug auf s ,

$$(11) \quad \frac{1}{2} \alpha \lambda K,$$

wo K die Kegelöffnung von s in Bezug auf den im Endlichen liegenden Pol des Solenoids bedeutet. Diesen Ausdruck nenne ich das Potential des Solenoidpols. Wenn die Intensität des Stroms in dem Solenoid gleich j ist, so sind die vorstehenden Ausdrücke noch mit j zu multiplizieren. In der Terminologie der Theorie des Magnetismus heisst das Produkt $\frac{1}{2} \alpha \lambda j$ die Quantität freier magnetischer Flüssigkeit in dem Pole, welche mit κ' bezeichnet werden soll. Demnach ist nach (11) das Potential eines Magnetpols

$$\kappa' K, \quad (12)$$

und nach (10) das Potential eines Magneten, dessen freie magnetische Flüssigkeiten in zwei Polen concentrirt gedacht werden dürfen,

$$\kappa' (K'' - K'). \quad (13)$$

Der Ausdruck (12) giebt den für die Anwendung wichtigen Satz:

Das Potential eines Magnetpols, dessen freie magnetische Flüssigkeit $= 1$ ist, in Bezug auf einen geschlossenen Strom s von der Intensität 1 , ist die Kegelöffnung von s in Bezug auf den Pol.

Der Ausdruck in (13) ergibt sich als ein Corollar dieses Satzes.

Aus demselben Satz läßt sich leicht das Potential eines Magneten in Bezug auf einen geschlossenen Strom s ableiten. Es bezeichne nämlich $D\omega$ das Element der Oberfläche des Magneten, und in ihm befinde sich die freie magnetische Flüssigkeit $\kappa D\omega$, K sei die auf $D\omega$ bezogene Kegelöffnung von s , so ist das Potential des Magneten in Bezug auf s , wenn der Strom in s die Intensität 1 hat,

$$S. \kappa K D\omega, \quad (14)$$

wo das Integral über die ganze Oberfläche des Magneten auszudehnen ist. Wenden wir diesen Ausdruck des Potentials auf den in (1) §. 9 enthaltenen Satz an, so erhalten wir für den Strom, der in einem geschlossenen Leiter s dadurch inducirt wird, daß ein Magnet aus der Lage ω , in die Lage ω'' fortgeführt wird, den Ausdruck

$$J = \epsilon \epsilon' S. \kappa (K' - K'') D\omega, \quad (15)$$

wo K' und K'' die Werthe von K in der Lage ω' und ω'' bedeuten.

Bewegt sich ein ungeschlossener Leiter in einer geschlossenen Bahn, so wird der in ihm von dem Magneten inducirte Strom durch dieselbe Formel

(15) ausgedrückt; es bedeuten dann aber K' und K'' die auf $D\omega$ bezogenen Kegelöffnungen der zwei geschlossenen Curven, auf welchen die Endpunkte des Leiters fortgeführt werden.

Die Formel

$$(15.a) \quad J = -\epsilon\epsilon' S. \kappa K D\omega$$

giebt den allgemeinsten Ausdruck für den in der Bewegung eines Leiters durch einen Magnet inducirten Strom, wenn durch K die auf $D\omega$ bezogene Kegelöffnung der Peripherie des Curvenvierecks bezeichnet wird, welches die von dem Leiter beschriebene Oberfläche begrenzt. Dieselben Formeln drücken auch den inducirten Strom aus, wenn statt des Leiters der Magnet in entgegengesetzter Richtung bewegt wird.

Hat der Magnet, ohne seinen Ort zu verändern, eine Änderung in der Vertheilung seiner magnetischen Flüssigkeit erfahren, so daß sich die Quantität freier Flüssigkeit in $D\omega$ von $\kappa'D\omega$ in $\kappa''D\omega$ verwandelt hat, so ist nach (4) §. 9 der dadurch in s inducirte Strom,

$$(16) \quad J^{(\mu)} = \epsilon\epsilon' S. (\kappa' - \kappa'') K D\omega.$$

Ist der durch κ bezeichnete Zustand des Magneten aus dem neutralen Zustand hervorgegangen, so wird der durch die Hervorrufung dieses magnetischen Zustandes κ inducirte Strom

$$(17) \quad J^{(\mu)} = -\epsilon\epsilon' S. \kappa K D\omega.$$

Die oben gegebene Definition von K als Kegelöffnung einer Curve s in Bezug auf einen Pol oder Punkt läßt noch unbestimmt, welches der beiden Stücke, die der aus dem Pol als Spitze durch die Curve s gelegte Kegel aus einer um den Pol mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kugel ausschneidet, jedesmal für K zu nehmen sei. Es bedarf deshalb, und auch wegen des Vorzeichens, welches dem Kugelflächenstück zu geben ist, noch einer nähern Diskussion. Leitend in dieser Diskussion ist die Bemerkung, daß K durch eine Integration entweder in Bezug auf den Weg, auf welchem der Pol sich bewegt hat, oder in Bezug auf die Axe eines Solenoids, oder endlich in Bezug auf die Oberfläche eines Magneten entstanden ist, und daß deshalb der Werth, welchen K an einem Orte ω , besitzt, auf eine stetige Art aus dem Werthe, welchen K an einem anderen Orte ω , besaß, hervorgegangen ist. Wir werden hiebei zu dem merkwürdigen Resultat gelangen, daß der Werth von K , d. i. des Potentials eines Pols in Bezug auf den geschlos-

senen Strom s , im Allgemeinen zwar durch die relative Lage des Pols in Bezug auf s bestimmt ist, in besondern Fällen aber auch von dem Wege abhängt, auf welchem er in diese Lage von einem andern Orte her gelangt ist.

Ich werde das zu diskutirende Integral

$$K = S \cdot \left(1 - \frac{z - \zeta}{r}\right) \cdot \frac{(y - \eta) Dx - (x - \xi) Dy}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

durch

$$K = S \cdot (1 - \cos \vartheta) \partial \phi \quad (18)$$

ausdrücken, wo ϑ den Winkel bedeutet, unter welchem r , d. i. die vom Pole (ξ, η, ζ) nach dem Elemente Ds gezogene Linie, gegen z geneigt ist, und ϕ den Winkel, welchen die durch r parallel mit z gelegte Ebene mit einer andern durch z gelegten festen Ebene bildet. Dies Integral ist auf alle Elemente von s auszudehnen. Ich werde der leichtern Darstellung wegen annehmen, daß die Curve s eben sei und von keiner Ebene öfter als zweimal geschnitten werden kann; die Erweiterung auf die Fälle, wo s doppelter Krümmung ist, oder öfter als zweimal von einer Ebene geschnitten werden kann, ergibt sich leicht.

Wenn die durch den Pol gelegte z Axe die Ebene von s innerhalb s trifft, sind in (18) die Grenzen der Integration 0 und 2π . Bezeichnet man durch ϑ und ϑ' die zu ϕ und $180 + \phi$ gehörigen Werthe von ϑ , so kann man in diesem Falle setzen

$$K = S_0^\pi \{2 - \cos \vartheta - \cos \vartheta'\} \partial \phi. \quad (19)$$

Trifft hingegen die durch den Pol gelegte z Axe die Ebene von s außerhalb s , und bezeichnet man die beiden zu demselben ϕ gehörigen Werthe von ϑ durch ϑ und ϑ' , so ist

$$K = S_{\phi}^{\phi''} \{\cos \vartheta - \cos \vartheta'\} \partial \phi, \quad (20)$$

wo ϕ , und ϕ'' die Werthe von ϕ sind, für welche $\vartheta = \vartheta'$.

Die positive Seite der Ebene von s werde ich diejenige nennen, für welche $z - \zeta$ und also auch $\cos \vartheta$ positiv ist, die negative dagegen, auf welcher $\cos \vartheta$ einen negativen Werth hat. Durch (K) werde ich das kleinere Stück bezeichnen, welches von der um den Pol (ξ, η, ζ) mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche von einem aus dem Pol durch die Curve s gelegten Kegel ausgeschnitten wird. Dieses (K) werde ich die spitze Kegelöffnung der Curve nennen.

Wenn der Pol in der Ebene von s und innerhalb s liegt, so ist $\cos \vartheta = -\cos \vartheta'$, und demnach zufolge (19) $K = 2\pi$; liegt der Pol in der Ebene von s außerhalb s , so ist $\cos \vartheta = \cos \vartheta'$, und nach (20) also $K = 0$. Es sei nun ω , ein Punkt auf der positiven, $\omega_{\text{„}}$ auf der negativen Seite der Ebene von s ; die zu ω , und $\omega_{\text{„}}$ gehörigen Werthe von K und (K) seien K' , (K') und K'' , (K'') . Geht man von ω , nach $\omega_{\text{„}}$ außerhalb s , so geht der Werth von $K' = (K')$ durch Null in $K'' = -(K'')$ über; wird aber, indem man von ω , nach $\omega_{\text{„}}$ geht, die Ebene von s innerhalb s geschnitten, so geht $K' = (K')$ durch 2π in $K'' = 4\pi - (K'')$ über. Geht man umgekehrt von $\omega_{\text{„}}$ nach ω , außerhalb s , so geht $K'' = -(K'')$ durch Null in $K' = +(K')$ über; geschieht der Durchgang durch die Ebene von s innerhalb s , so geht $K'' = -(K'')$ durch -2π in $K' = -4\pi + (K')$ über. Es ist also der Werth von K in einem Punkte ω , auf der positiven Seite der Ebene von s durch $+(K')$, und in einem Punkte $\omega_{\text{„}}$ auf der negativen Seite durch $-(K'')$ gegeben; man muß aber zu $+(K')$ noch -4π hinzufügen, wenn man nach ω , von der negativen Seite her gelangt ist, und zwar so, daß die Ebene von s innerhalb s geschnitten wurde; und zu $-(K'')$ ist noch $+4\pi$ hinzuzufügen, wenn man nach $\omega_{\text{„}}$ von einem Punkte auf der positiven Seite her gelangt, indem man die Ebene von s innerhalb s schneidet. Nach dieser Regel ist es leicht, die Veränderungen zu verfolgen, welche K erfährt, wenn man sich von einem beliebig gelegenen Punkte ω , nach einem andern $\omega_{\text{„}}$ auf einer Bahn bewegt, welche die Ebene von s mehreremal schneidet. Es werde diese Ebene von der Bahn $\omega, \omega_{\text{„}}$ innerhalb s eine Anzahl p mal von der positiven, und n mal von der negativen Seite her geschnitten, so ist, wenn die Werthe von K und (K) in ω , durch K' und (K') , und in $\omega_{\text{„}}$ durch K'' und (K'') bezeichnet werden,

$$(21) \quad \begin{aligned} K' &= \pm (K'), \\ K'' &= \pm (K'') + 4p\pi - 4n\pi, \end{aligned}$$

wo das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt, auf welchen sich die Gleichung bezieht, auf der positiven oder negativen Seite liegt. Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung (15), so wird der Strom, welcher in s durch die Bewegung eines Pols von ω , nach $\omega_{\text{„}}$ inducirt worden ist,

$$(22) \quad J = \epsilon \epsilon' \kappa \{ \pm (K') \mp (K'') + 4(n - p)\pi \}.$$

Ist der Pol zu dem Punkte zurückgekehrt, von welchem er ausging, so ist $(K'') = (K')$, und also

$$J = 4(n - p) \pi \epsilon \epsilon' \kappa. \quad (23)$$

Diese Gleichung giebt den Satz:

Wenn sich ein Magnetpol in einer geschlossenen Bahn bewegt hat, so ist die Summe der dadurch in einem geschlossenen Leiter s inducirten elektromotorischen Kräfte gleich Null, es sei denn, daß die Bahn des Pols die Ebene von s innerhalb s geschnitten hat. So oft die Bahn diese Ebene innerhalb s von der positiven Seite her geschnitten hat, so oft ist eine elektromotorische Kraft vom Werthe $-4\pi\epsilon\kappa$, und bei jedem Durchschnitt von der negativen Seite her eine elektromotorische Kraft $+4\pi\epsilon\kappa$ inducirt worden. Dieser Satz ist leicht auf den Fall zu übertragen, wo der Pol ruht und der geschlossene Leiter bewegt wird; die Formeln (22) und (23) bestimmen auch in diesem Falle den inducirten Strom.

§. 13.

Um den Nutzen, welchen die Formeln des vorhergehenden § gewähren, deutlicher hervortreten zu lassen, werde ich dieselben auf einige einfache specielle Fälle anwenden.

I.

Zuerst will ich die Ströme, welche durch den Erdmagnetismus in bewegten geschlossenen Leitern inducirt werden, unter der Voraussetzung bestimmen, daß die Leiter und ihre Bahnen von solchen Dimensionen sind, daß die Wirkung des Erdmagnetismus auf ein Element des Leiters unabhängig von seinem Orte ist und nur von seiner Richtung abhängt. Die Induktion findet dann also nur in Folge der Drehung des Leiters statt. Die Wirkung, welche der Erdmagnetismus auf den Leiter s ausübt, kann durch die eines magnetischen Pols P ersetzt werden, welcher in der Richtung der Inklination in der Entfernung r liegt, wo r im Verhältniß zu den Dimensionen von s sehr groß ist. Statt des Potentials des Erdmagnetismus in Bezug auf den Leiter s kann demnach das Potential des Pols P gesetzt werden, welches, wenn κ die freie magnetische Flüssigkeit in P bezeichnet, nach (12)

des vorigen § $\varkappa K$ ist, die Intensität des Stroms in s gleich 1 gesetzt. Wird der Leiter s aus der Lage ω , in die Lage ω'' geführt, und bezeichnet man die diesen Lagen angehörigen Werthe von K durch K' und K'' , so ist der durch diese Bewegung inducirte Strom

$$(1) \quad J = \varepsilon \varepsilon' \varkappa (K' - K'').$$

Da der Pol P bei der Drehung des Leiters s dessen Ebene immer außerhalb s schneidet, so wird K hier immer durch die spitze Kegelöffnung (K) ausgedrückt, welcher das positive oder negative Vorzeichen gegeben werden muß, je nachdem sich der Pol diesseits oder jenseits der Ebene von s befindet. Wegen des großen Werthes von r ist die spitze Kegelöffnung gleich dem durch r^2 dividirten ebenen Inhalt des Leiters, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, unter welchem ihre Normale gegen r geneigt ist. Dieser Winkel heiße ν , und der vom Strom umkreiste ebene Raum werde durch F bezeichnet, so ist $K = (K) = \frac{F}{r^2} \cos \nu$. Demnach verwandelt sich (1) in

$$(2) \quad J = \varepsilon \varepsilon' \frac{\varkappa F}{r^2} (\cos \nu' - \cos \nu'').$$

Hier ist $\frac{\varkappa}{r^2}$ die Intensität des Erdmagnetismus an dem Beobachtungsort, welche ich durch M bezeichnen werde. Die Leiterebene werde um eine Axe gedreht, gegen welche sie unter $90^\circ - c$ geneigt ist, und diese Drehungsaxe bilde mit r den Winkel (a, r) . Den Drehungswinkel bezeichne ich mit ϕ und wähle seinen Anfang so, daß $\phi = 0$, wenn sich die Normale auf der Leiterebene in der durch die Drehungsaxe und r gelegten Ebene befindet. Als dann ist

$$\cos \nu = \cos(a, r) \cos c + \sin(a, r) \sin c \cos \phi,$$

und also, wenn der Leiter aus der Lage ϕ , in die Lage ϕ'' gedreht worden, der dadurch inducirte Strom

$$(3) \quad J = \varepsilon \varepsilon' M F \sin(a, r) \sin c \{\cos \phi - \cos \phi''\}.$$

Der Integralstrom einer geschlossenen Bahn, auf welcher sich ein geschlossener Leiter unter dem Einfluß eines Magneten bewegt hat, ist immer gleich Null; seine Wirkung, wenn sie in einem kurzen Zeitintervall stattfindet, kann deshalb nur unter Anwendung des Commutators beobachtet werden, und dieser muß die Richtung des Stroms in die entgegengesetzte jedesmal da umsetzen, wo der Differentialstrom sein Vorzeichen ändert. Dies

findet, wenn die Bahn eine stetige ist, da statt, wo der Integralstrom eines unbestimmten Stücks der Bahn ein Maximum oder Minimum ist. — Der vorstehende Ausdruck des Stroms verschwindet für eine ganze Umdrehung, d. h. wenn $\phi' = \phi''$; behufs der Beobachtung muß seine Richtung mittelst des Commutators bei den Stellungen des Leiters umgesetzt werden, für welche $\phi = 0, \phi = 180$ etc., d. i. wenn die Normale auf ihm mit r und der Drehungsaxe in einer Ebene liegt. Wird der Commutator auf diese Weise angewandt, so giebt jede halbe Umdrehung einen Strom

$$J = 2\epsilon\epsilon' MF \sin(a, r) \sin c. \quad (4)$$

Die Drehungsaxe sei parallel mit der Ebene des Leiters, d. i. $c = 90^\circ$; sie stehe horizontal und sei einmal senkrecht zum Meridian und dann parallel mit ihm. Im ersten Falle ist $\sin(a, r) = 1$ und der Strom der halben Umdrehung

$$2\epsilon\epsilon' MF. \quad (5)$$

Im zweiten Falle ist $\sin(a, r) = \sin j$, wenn j die magnetische Inklination an dem Beobachtungsort bedeutet, und der Strom der halben Umdrehung

$$2\epsilon\epsilon' MF \sin j. \quad (6)$$

Steht die Drehungsaxe vertikal, so ist der Strom jeder halben Umdrehung

$$2\epsilon\epsilon' MF \cos j. \quad (7)$$

Man vergleiche hiemit Webers Abhandlung über das Induktionsinklinatorium.

II.

Die Anwendung der Formeln (14) bis (17) des vorigen § setzt die Kenntniss von κ als Funktion der Stelle der Oberfläche des Magneten voraus. Diese Kenntniss ist in den meisten Fällen nur angenähert zu erlangen. Ich werde in dieser Hinsicht die beiden Voraussetzungen machen, welche in vielen Fällen als angenähert richtig betrachtet werden dürfen, daß der Magnet von cylindrischer oder prismatischer Form sei und die beiden magnetischen Flüssigkeiten gleichförmig über seine Grundflächen verbreitet seien, während die Seitenflächen davon frei sind. Die Dimensionen der Grundflächen seien im Verhältniss zu ihren Entfernungen von dem Leiter so klein, daß die Werthe der zu den einzelnen Elementen df derselben Grundfläche gehörigen K als gleich angesehen werden können. Durch K_0 werde ich den den

Elementen der obern Grundfläche o , durch K , den den Elementen der untern u gemeinschaftlichen Werth von K bezeichnen, und die Gröfse der Grundfläche durch f .

Es soll der Strom bestimmt werden, welcher durch die Erregung des magnetischen Zustandes κ dieses Magneten in einem kreisförmigen Leiter vom Halbmesser R inducirt wird, dessen Ebene auf der Axe des Magneten senkrecht steht und dessen Mittelpunkt in dieser Axe liegt. Die Formel (17) des vorigen § giebt

$$(8) \quad J = -\varepsilon\varepsilon' S \kappa df = -\varepsilon\varepsilon' \kappa f \{K_o - K_u\}.$$

Um K durch (K) auszudrücken, muß man die drei Fälle unterscheiden, in denen 1) beide Grundflächen des Magneten diesseits der Leiterebene, 2) die Leiterebene zwischen beiden Grundflächen, 3) beide Grundflächen jenseits der Leiterebene liegen. Der Werth von $K_o - K_u$ wird in diesen drei Fällen respective

$$(K_o) - (K_u), \quad 4\pi - (K_o) - (K_u), \quad -(K_o) + (K_u).$$

Diese drei Ausdrücke reduciren sich auf denselben analytischen Ausdruck. Ich nenne h die Höhe des Magneten, d. i. die Entfernung ou , und x die Entfernung der Leiterebene von o , welche ich positiv nehme, wenn der Mittelpunkt des Leiters in der Verlängerung von uo über o hinaus liegt: alsdann ist für alle Lagen der Leiterebene

$$(9) \quad K_o - K_u = 2\pi \left\{ \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right\},$$

und der durch den Akt der Magnetisirung inducirte Strom

$$(10) \quad J = -2\pi \varepsilon\varepsilon' \kappa f \left\{ \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right\}.$$

Dieser Strom wird ein Maximum, wenn $x = -\frac{1}{2}h$, d. h. wenn der Leiter sich zwischen den Polen des Magneten von beiden gleichweit entfernt befindet. Der grösste Werth des Induktionsstroms wird daher

$$(11) \quad J_{(m)} = -\frac{4\pi \varepsilon\varepsilon' \kappa f}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{h}\right)^2}},$$

während derselbe, wenn die Leiterebene durch den obern Pol geht, den Werth $\frac{2\pi \varepsilon\varepsilon' \kappa f}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2}}$ hat, also wenn $\frac{R}{h}$ eine kleine Gröfse ist, nur nahe halb so groß ist.

Wir wollen jetzt annehmen, der Magnet befinde sich in einer Spirale von N Windungen und von der Länge L ; die Axe des Magneten falle mit der Axe der Spirale zusammen, und für die Enden der Spirale sei $x = -a$ und $x = -(a + L)$. Da auf der Länge L sich N Windungen befinden, dürfen wir uns denken, daß auf ∂x sich $\frac{N\partial x}{L}$ Windungen befinden. Wir haben also den Ausdruck (10) mit $\frac{N\partial x}{L}$ zu multipliciren und zwischen den Grenzen $x = -(a + L)$ und $x = -a$ zu integriren, um den in der Spirale inducirten Strom zu erhalten. Dies giebt

$$J_s = -2\pi\epsilon\epsilon'\kappa f \frac{N}{L} \left\{ \frac{\sqrt{(L+a)^2 + R^2} - \sqrt{(h-L-a)^2 + R^2}}{-\sqrt{a^2 + R^2} + \sqrt{(h-a)^2 + R^2}} \right\}. \quad (12)$$

Wenn die Spirale von beiden Enden des Magneten gleich weit entfernt ist, d. h. wenn $L + a = h - a$, so wird dieser Strom

$$J_s' = -4\pi\epsilon\epsilon'\kappa f \frac{N}{L} \{ \sqrt{(h-a)^2 + R^2} - \sqrt{a^2 + R^2} \}. \quad (13)$$

Der Ausdruck in (12) verwandelt sich, wenn die Entfernung der Enden der Spirale von den Enden des Magneten im Verhältniß zum Durchmesser der Spirale groß ist, d. h. wenn $\frac{R}{a}$ und $\frac{R}{h-a-L}$ kleine Größen sind, in

$$J_s = -4\pi\epsilon\epsilon'\kappa f N, \quad (14)$$

d. h. wenn der Durchmesser der Spirale gegen ihre Entfernung von den Enden des Magneten klein ist, wird die in ihr durch den Akt der Magnetisirung inducirte elektromotorische Kraft der Anzahl ihrer Windungen proportional und von ihrem Durchmesser und ihrer Stelle auf dem Magneten unabhängig.

Wenn man in (12) $a = 0$ und $L = h$ setzt, d. h. wenn der ganze Magnet von Windungen bedeckt wird, so verwandelt sich der vorige Ausdruck in

$$J_s = -4\pi\epsilon\epsilon'\kappa f N \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{R}{L}\right)^2} - \frac{R}{L} \right\}, \quad (15)$$

so daß der eben ausgesprochene Satz auch in diesem Falle gilt, wenn nur $\frac{R}{L}$ eine kleine Größe ist. Hier aber sowohl als in (4) müssen die Dimensionen von f im Verhältniß zu R klein sein. Man vergleiche die Untersuchungen von Lenz in Pogg. Ann. B. 34 und 47.

Es werde unter dem Einfluß eines Magneten von derselben Beschaffenheit wie der, auf welchen die vorstehende Betrachtung bezogen

wurde, ein geschlossener kreisförmiger Leiter aus der Lage ω , in die Lage ω' geführt, so ist der durch diese Bewegung in ihm inducirte Strom nach (15) des vorigen §

$$J = -\varepsilon\varepsilon'nf\{K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\},$$

wo sich K_o , K_u auf die Lage ω , und K'_o , K'_u auf die Lage ω' beziehn. Ist ω sehr weit von dem Magnet entfernt, so ist $K'_o = K'_u = 0$, und der inducirte Strom wird derselbe als in (8). Steht in der Lage ω die Ebene des Leiters auf der Axe des Magneten senkrecht, und liegt sein Mittelpunkt in dieser Axe von den Grundflächen o und u um x und $x + h$ entfernt, so ist, wenn R wieder den Halbmesser des Leiters bedeutet, der inducirte Strom durch die Gleichung (10) gegeben. Dieser Strom ist also, wenn $x = -\frac{1}{2}h$, ein Maximum, welches durch (11) ausgedrückt wird. Wenn statt der einfachen Windung eine cylindrische Spirale von der Länge L mit N Windungen aus einer grossen Entfernung ω , in die Lage ω' gebracht worden ist, in welcher sich die Spirale zwischen beiden Magnetpolen befindet, und ihre erste und letzte Windung vom obern Ende o des Magneten respektive um $-a$ und $-(a + L)$ entfernt ist, so wird der in der Spirale inducirte Strom durch (12) ausgedrückt. Auch gelten für die bewegte Spirale die Formeln (13), (14) und (15) unter den ihnen zum Grunde liegenden Bedingungen. Wenn daher eine Spirale aus grosser Entfernung gegen den Magnet geführt und demselben so aufgesteckt wird, dafs ihre Axe mit der Magnetaxe zusammenfällt, und ihre Enden weit von den Magnetenden entfernt sind, so ist die in der Spirale inducirte elektromotorische Kraft der Anzahl ihrer Windungen proportional und von ihrem Durchmesser und ihrer Stelle unabhängig. Derselbe Satz gilt auch, wenn die Spirale den Magnet ganz bedeckt, unter der Bedingung, dafs ihr Durchmesser im Verhältnifs zu den Querdimensionen des Magneten gross, und im Verhältnifs zu seiner Länge klein ist.

Es bezeichne ω , die Mitte der Axe des Magneten, und ω' einen in der Verlängerung der Axe ausserhalb des Magneten liegenden Punkt. Zwischen ω und ω' werde der Mittelpunkt des kreisförmigen Leiters vom Halbmesser R hin und hergeführt, während seine Ebene auf der Magnetaxe senkrecht bleibt; es ist der durch diese Bewegung inducirte Strom zu bestimmen. Soll der Integralstrom mehrerer Hin- und Hergänge beobachtet werden, so

mufs jedesmal in ω , und ω'' , die Richtung des Stroms mittelst des Commutators umgesetzt werden, weil hier die Differentialströme ihre Richtung ändern. Auf dem Wege von ω'' nach ω , wird der Strom

$$J = -\epsilon\epsilon'\kappa f\{K'_o - K'_u - (K''_o - K''_u)\}$$

inducirt, und demnach ist, wenn der Commutator auf die angegebene Weise angewandt wird, der durch n Hingänge und n Hergänge inducirte Strom

$$J_n = -2n\epsilon\epsilon'\kappa f\{K'_o - K'_u - (K''_o - K''_u)\}. \quad (16)$$

Wenn in ω , die Richtung des Stroms statt durch den Commutator dadurch umgesetzt wird, dafs der Leiter um einen seiner Durchmesser um 180° gedreht wird, so kommt zu diesem Strom (16) noch der durch die Drehung inducirte hinzu. Der durch n solcher Drehungen inducirte Strom ist aber $2n\epsilon\epsilon'\kappa f\{K''_o - K''_u\}$, und daher der durch die fortschreitende und drehende Bewegung inducirte Strom

$$J'_n = 2n\epsilon\epsilon'\kappa f\{K''_o - K''_u\}.$$

Diese Anordnung hat also denselben Erfolg, als läge der Punkt ω , unendlich weit von dem Magneten entfernt; auch bleibt der Erfolg derselbe, wenn sie auf eine Spirale ausgedehnt wird; es gelten demnach für diese Anordnung dieselben Folgerungen, wie vorher für den Fall wenn ω , unendlich weit entfernt ist. Man vergleiche Webers Abhandlung über den Gaußschen Induktor, Resultate 1838.

III.

Derselbe Magnet, auf welchen sich die bisherige Betrachtung bezogen hat, sei in die Form eines Hufeisens gebogen, die Entfernung der beiden Pole o und u sei $2a$, die Mitte von ou werde mit m bezeichnet. In m befinde sich eine Drehungsaxe senkrecht auf ou , und mit ihm sei ein kreisförmiger Leiter vom Halbmesser R so verbunden, dafs seine Ebene senkrecht auf dem von seinem Mittelpunkt auf die Axe gefällten Perpendikel stehe, dieser die Axe in m treffe, und der Leiter zwischen den Polen um diese Axe gedreht werden kann. Damit letzteres möglich sei, mufs, wenn x die Entfernung der Leiterebene von der Drehungsaxe bezeichnet, $x^2 + R^2 < a^2$ sein. Den Drehungswinkel werde ich ϕ nennen und ihn von einer der Lagen der Leiterebene anrechnen, in welcher sie auf der Linie mo senkrecht stand. Der durch eine Drehung von $\phi = 0$ bis $\phi = \phi$ inducirte Strom ist

$$J = -\epsilon\epsilon'\kappa f\{K'_o - K'_u - (K''_o - K''_u)\},$$

wo K'_o , K'_u die zu $\phi = 0$ gehörigen Werthe von K_o und K_u bedeuten. Die Maxima und Minima dieses Ausdrucks finden bei $\phi = 180^\circ$, $\phi = 360^\circ$ u. s. w. statt; an diesen Stellen muß, wenn der Strom bei fortgesetzter Drehung seine Richtung nicht ändern soll, der Commutator sie umsetzen; zwischen je zwei solchen Umsetzungen hat der Strom dieselbe Intensität, es bedarf also nur der Entwicklung seines Werths für die Werthe von ϕ zwischen 0 und 180° . Es beziehe sich demnach in dem vorstehenden Ausdruck K_o und K_u auf $\phi = 180^\circ$. Wir haben $K'_o = (K_o)$, und da man von o nach u auf die andere Seite der Leiterebene längs dem Magneten außerhalb des Leiters gelangt, $K'_u = -(K_u)$. Ferner ist, da bei einer Drehung um 180° die Pole des Magneten die Leiterebene außerhalb des Leiters schneiden, $K_o = -(K_o)$, $K_u = (K_u)$. Demnach wird der durch eine Drehung von $\phi = 0$ bis $\phi = 180^\circ$ inducirte Strom

$$J = \epsilon \epsilon' \kappa f \{ (K_o) + (K_u) + (K'_o) + (K'_u) \}.$$

Nun ist

$$(K'_o) = (K_u) = 2\pi \left(1 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + R^2}} \right),$$

$$(K'_u) = (K_o) = 2\pi \left(1 - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + R^2}} \right),$$

also

$$(17) \quad J = 4\pi \epsilon \epsilon' \kappa f \left\{ 2 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + R^2}} - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + R^2}} \right\}.$$

Hieraus ergeben sich die Formeln für die Fälle, wenn mehrere Windungen mit der Drehungsaxe verbunden sind, und für ihre vortheilhafteste Anordnung. Man vergleiche Webers Abhandlung über den Rotations-Induktor.

IV.

Es soll der Strom bestimmt werden, welcher in einer Anordnung wie in der v. Ettinghausenschen Maschine durch die festen Magnetpole in einem Umgang der Spirale, welche über die Anker gelegt ist, in Folge ihrer Rotation inducirt wird. Der Magnet ist wie vorher hufeisenförmig gebogen, und in Bezug auf seine Endflächen o und u sollen dieselben Voraussetzungen wie oben gelten. Mit der durch die Mitte m der Linie $ou = 2a$ gehenden Drehungsaxe, die senkrecht auf ou steht, sei ein kreisförmiger Leiter vom Halbmesser R so verbunden, daß seine Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe steht, und sein Mittelpunkt von derselben um a entfernt ist; die Ent-

fernung der Pole o und u von der Leiterebene sei x . Die Maxima oder Minima des Integralstroms treten ein, wenn sich der Mittelpunkt des Leiters in der kleinsten Entfernung von o oder u befindet; hier muß seine Richtung durch den Commutator umgesetzt werden. Der Induktionsstrom einer halben Umdrehung, in welcher der Mittelpunkt des Leiters aus seiner kleinsten Entfernung von o in die kleinste Entfernung von u fortgeführt wird, ist

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\kappa f\{K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\},$$

wo sich K'_o , K'_u und K_o , K_u auf diese zwei Lagen des Leiters beziehen. Es ist aber $K'_o = K'_u$, $K_u = K'_o$, und da die Pole immer auf derselben Seite der Leiterebene bleiben, $K_o = (K_o)$, $K_u = (K_u)$. Hiernach wird der vorstehende Ausdruck

$$J = -2\varepsilon\varepsilon'\kappa f\{(K_o) - (K_u)\}. \quad (18)$$

Hier ist $(K_u) = 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$ und für K_o kann man den angenäherten Werth $\frac{R^2\pi x}{\{4a^2 + x^2\}^{\frac{3}{2}}}$ setzen, so daß

$$J = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\kappa f\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{\frac{1}{2}R^2x}{(4a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}. \quad (19)$$

V.

In allen diesen Beispielen der Anwendung der Formeln des vorigen § bildet der inducirte Leiter eine geschlossene Curve. Ich werde mich jetzt mit einem Beispiel der Induktion in einem ungeschlossenen Leiter beschäftigen. Der prismatische Magnet, auf welchen sich die obige Betrachtung bezog, in welchem die freien magnetischen Flüssigkeiten auf den Grundflächen o und u gleichförmig vertheilt gedacht werden können, rotire um seine Axe. Zwei kreisförmige Metallscheiben mit den Halbmessern R und R' seien mit der über o hinaus verlängerten Axe uo so verbunden, daß ihre Mittelpunkte a und a' in dieser verlängerten Axe liegen, und ihre Ebenen senkrecht darauf stehen. Die Scheiben stehen unter einander in einer leitenden Verbindung. Während der Magnet mit diesen beiden Scheiben roirt, schleifen gegen ihre Ränder zwei Metallfedern, die unter einander durch einen Leitungsdrath verbunden sind, welcher den Multiplicator eingeschaltet enthält. Die Berührungspunkte der Scheiben und der Federn

sollen mit β und β' bezeichnet werden. Die Metallfedern mit ihrem verbindenden Schließungsdrath bilden einen ungeschlossenen Leiter, in welchem durch die Rotation des Magneten ein Strom inducirt wird. Derselbe Strom würde auch inducirt werden, wenn der Magnet ruhte und die Metallfedern mit ihrem Schließungsdrath in entgegengesetzter Richtung rotirten. Das Maass der inducirten elektromotorischen Kraft wird also das Potential des Magneten in Bezug auf die Peripherie der Oberfläche, welche der Leiter in dieser Bewegung beschreiben würde, diese Peripherie vom Strome ϵ durchströmt gedacht. Für jede ganze Umdrehung ist diese Oberfläche allein von den beiden Curven begrenzt, welche die Enden β und β' des ungeschlossenen Leiters beschreiben. Die durch eine ganze Umdrehung des Magneten inducirte elektromotorische Kraft ist demnach die Differenz der Werthe des Potentials des Magneten in Bezug auf diese beiden Curven, d. i. in Bezug auf die beiden mit den Halbmessern R und R' um a und a' beschriebenen, senkrecht auf uo stehenden Kreise. Der inducirte Strom ist also

$$J = -\epsilon\epsilon'\kappa f \{K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\},$$

wo die Gröfsen K' die Kegelöffnungen der Pole o und u in Bezug auf den Kreis R' , die Gröfsen K dieselben in Bezug auf den Kreis R bedeuten. Es werde oa und oa' durch x und x' bezeichnet, so wie ua und ua' durch $x + h$ und $x' + h$; liegt der Kreis R zwischen beiden Polen, so erhält x einen negativen Werth. Es ist hiernach

$$K_o = 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right), \quad K'_o = 2\pi \left(1 - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + R'^2}}\right),$$

$$K_u = 2\pi \left(1 - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + R^2}}\right), \quad K'_u = 2\pi \left(1 - \frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2 + R'^2}}\right),$$

wodurch sich der vorstehende Ausdruck des Stroms in

$$(20) \quad J = 2\pi\epsilon\epsilon'\kappa f \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + R^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + R'^2}} + \frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2 + R'^2}} \right\}$$

verwandelt. Setzen wir hierin $R' = 0$, um die Anordnung, welche in den Weberschen Experimenten der unipolaren Induktion stattfindet, zu erhalten, d. h. lassen wir β' in die Axe des Magneten fallen, so wird der Strom

$$J_o = 2\pi\epsilon\epsilon'\kappa f \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + R^2}} \right\}. \quad (21)$$

In diesen Ausdrücken kann x sowohl positiv als negativ sein; in der Weberschen Anordnung ist x negativ. Der günstigste Werth von x in (21) ist $-\frac{1}{2}h$; dieser giebt

$$J_o = - \frac{4\pi\epsilon\epsilon'\kappa f}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{h}\right)^2}}.$$

$$(21) \quad \lambda = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2} - \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2} \right)$$

In diesen Ausdrücken kann r sowohl positiv als negativ sein; in der
 letzteren Anordnung ist r negativ. Der günstigste Werth von r in
 (21) ist $-\frac{1}{2}a$; dieser giebt

$$\lambda = \frac{1}{2\pi r} \left(1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)$$



Neumann, Franz Ernst,

Die Mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme

Berlin 1846

4 Phys.sp. 181

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10058580-1